This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 358.89

HARVARD COLLEGE LIBRARY

BOUGHT FROM THE INCOME OF THE FUND
BEQUEATHED BY
PETER PAUL FRANCIS DEGRAND
(1787–1855)
OF BOSTON

FOR FRENCH WORKS AND PERIODICALS ON THE EXACT SCIENCES
AND ON CHEMISTRY, ASTRONOMY AND OTHER SCIENCES
APPLIED TO THE ARTS AND TO NAVIGATION

HARVARD COLLEGE

SCIENCE CENTER
LIBRARY

RÉSUMÉ

DES

CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

NÉCESSAIRES

DANS LA PRATIQUE DES TRAVAUX PUBLICS

ET DE LA CONSTRUCTION

RÉSUMÉ

DES

CONNAISSANCES

MATHÉMATIQUES

NÉCESSAIRES

DANS LA PRATIQUE DES TRAVAUX PUBLICS
ET DE LA CONSTRUCTION

CALCUL INFINITÉSIMAL. — COURBES DU SECOND DEGRÉ
MÉCANIQUE RATIONNELLE

PAR

E. MUSSAT
INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES

PARIS
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE, BAUDRY ET Cie ÉDITEURS
15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15
MÊME MAISON A LIÉGE, RUE DES DOMINICAINS, 7

1889

Tous droits réservés.

Math 358.89

HARVARD COLLEGE
JUN 11 1918
LIBRARY

Sparks fund

PRÉFACE

Le présent ouvrage est principalement destiné aux Conducteurs des Ponts et Chaussées, Agents voyers, Chefs de section de chemins de fer, Architectes, etc. Il s'adresse en général à toutes les personnes qui, s'occupant de construction, désirent acquérir les notions de mathématiques nécessaires pour suivre complètement les calculs conduisant aux formules usitées dans les travaux publics, et particulièrement aux formules de résistance des matériaux et d'hydraulique.

Il n'exige pour être facilement suivi d'autres connaissances préalables que les éléments d'algèbre, de géométrie et de trigonométrie qui figurent au programme de l'examen de conducteur des ponts et chaussées.

Il est divisé en trois parties.

La première partie traite du calcul infinitésimal, réduit aux notions strictement nécessaires pour les applications pratiques. On s'est appliqué, en la rédigeant, à exposer le plus clairement qu'on a pu, le but et les procédés principaux de la méthode infinitésimale. On est entré sur ce point dans les explications les plus minutieuses. Au risque de tomber dans quelques longueurs, on a développé avec les plus grands détails tous les intermédiaires des raisonnements et des calculs. En un mot,

on a cherché à faciliter le plus possible aux lecteurs l'intelligence de notions qui, expliquées avec une clarté suffisante et suivies avec attention, ne présentent pas de bien grandes difficultés.

La seconde partie a pour objet une étude sommaire des courbes du second degré. Elle constitue une application géométrique de la première partie, et fait en outre connaître les principales propriétés de courbes que l'on rencontre fréquemment dans la pratique.

La troisième partie est un exposé des éléments de la mécanique rationnelle. Elle s'appuie sur les considérations développées dans les deux premières parties, et traite complètement un certain nombre de questions que la mécanique élémentaire ne peut aborder que très imparfaitement.

La seconde et la troisième partie n'offrent aucune difficulté sérieuse.

Les deux premières parties et le commencement de la troisième, ont fait l'objet d'un cours que l'auteur a professé il y a quelques années à des conducteurs des ponts et chaussées.

L'empressement avec lequel les auditeurs se sont rendus à ce cours a témoigné de l'intérêt attaché par eux aux questions qui devaient en faire l'objet. En outre, l'auteur a pu se convaincre dans cette circonstance que, pour que ces questions fussent traitées avec fruit, il était nécessaire qu'elles fussent accompagnées d'explications claires et minutieuses, et surtout qu'il était absolument indispensable de ne supprimer, en les exposant, aucun intermédiaire, ni dans les raisonnements, ni dans les calculs.

La plupart des ouvrages qui traitent de ces sujets, et principalement du calcul infinitésimal, sont destinés à un public familier avec les études mathématiques, et en quelque sorte entraîné sur ces matières. Aussi sont-ils difficilement utilisables

pour les lecteurs auxquels est spécialement destiné ce résumé.

L'auteur a donc cru faire une œuvre utile en publiant, après les avoir revues et complétées, les notes qu'il avait autrefois rédigées en vue du cours auquel il a fait allusion plus haut. Il s'est imposé cette règle absolue, de ne considérer aucune des questions traitées dans cet ouvrage comme exposée avec une clarté suffisante, qu'après en avoir mis le texte sous les yeux de conducteurs ou de commis des ponts et chaussées et après s'être assuré que, sans autres explications, elles étaient entièrement comprises.

Il espère avoir réussi dans le but qu'il s'est proposé et avoir ainsi rendu service à un personnel qu'il a toujours trouvé laborieux et désireux de s'instruire.

ERRATA

AVIS IMPORTANT

Nous engageons vivement les lecteurs peu familiers avec les mathématiques à reporter, préalablement à toute lecture, les corrections indiquées ci-dessous à leur place dans le corps de l'ouvrage.

Page	Ligne	
5	17	Au lieu de : *y égale fonction de x, y, t, u...*
		Il faut lire : *y égale fonction* de *x, z, t, u...*
16	8	Au lieu de : $\frac{1}{2}\,MM'' \times PP''$
		Il faut lire : $\frac{1}{2}\,MM'' \times PP'$
37	5	Au lieu de :
		$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[f'_u(u,v) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right]\left[\psi'_x + \varepsilon_3\right] + \left[f'_v(u,v) + \varepsilon_4\right]\left[\psi'_x + \varepsilon_5\right]$
		Il faut lire :
		$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[f'_u(u,v) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right]\left[\varphi'_x + \varepsilon_3\right] + \left[f'_v(u,v) + \varepsilon_4\right]\left[\psi'_x + \varepsilon_5\right]$
59	27	Au lieu de : $\log y = n + \frac{r}{r}$
		Il faut lire : $\log y = n + \frac{r}{p}$
82	18	Au lieu de : Dans le premier cas le rapport $\frac{y_1 d}{dx_1}$ est positif.
		Il faut lire : Dans le premier cas le rapport $\frac{dy_1}{dx_1}$ est positif.
116	24	Au lieu de : $u = \int_b^a \varphi(x,y)\,dy$
		Il faut lire : $u = \int_a^b \varphi(x,y)\,dy$

Page	Ligne	
125	27	Au lieu de : $NN'P'P = ydx$
		Il faut lire : $NN'P'P = y'dx$
140	30	Au lieu de : $\int (R^2 - z^2)\, dz = \int R^2 dz - \int z^2 dz = R^2 z + \frac{z^3}{3} + C$
		Il faut lire : $\int (R^2 - z^2)\, dz = \int R^2 dz - \int z^2 dz = R^2 z - \frac{z^3}{3} + C$
170	6	Au lieu de : $ax^2 + by^2 + 2hxy = 0$
		Il faut lire : $ax^2 + by^2 + 2hxy + c = 0$
196	17	Au lieu de : k a pour valeur $\frac{c}{a}$
		Il faut lire : k a pour valeur $\frac{a}{c}$
221	2	Au lieu de : $\frac{dz}{dt} = \int \chi)\ (t^2\, dt$
		Il faut lire : $\frac{dz}{dt} = \int \chi\ (t)\, dt$
221	3	Au lieu de : $z = \int\int \chi\ (t)\, dt$
		Il faut lire : $z = \int\int \chi\ (t)\, dt^2$
222	35	Au lieu de : $\frac{1}{2} j_r\, dt^2 = MM'' - vdt = MM'' - MM_1 = M_1M''$
		Il faut lire : $\frac{1}{2} j_r\, dt^2 = MM'' - vdt = MM'' - MM_1 = M_1M''$
271	23	Au lieu de : $\frac{CA'}{CB'} = \frac{CA}{CB} = \frac{F}{F}$
		Il faut lire : $\frac{CA'}{CB'} = \frac{CA}{CB} = \frac{F'}{F}$
263	24	Au lieu de : nous allons chercher à intégrer l'équation (11).
		Il faut lire : nous allons chercher à intégrer l'équation (11). (Nous ne traiterons que le cas où la trajectoire est une ellipse.)
330	28	Au lieu de : pour que la droite oP soit dans le plan (1),
		Il faut lire : pour que la droite oP' soit dans le plan (1),
347	24	Au lieu de : puisque l'accélération j, qu'elle lui communiquera
		Il faut lire : puisque l'accélération j_r, qu'elle lui communiquera
365	19	Au lieu de : deux arcs MM_1, $M'M'_1$
		Il faut lire : deux arcs MM', $M_1M'_1$

PREMIÈRE PARTIE

NOTIONS PRATIQUES

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL

NOTIONS PRATIQUES

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL

CHAPITRE PREMIER

OBJET PRATIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL

§ I. — But général des mathématiques appliquées.

§ II. — Définitions. Variables. Fonctions explicites, implicites, algébriques, entières, rationnelles, transcendantes. Fonctions continues. Représentation géométrique des fonctions. Limites. Infiniment petits.

§ III. — Objet pratique du calcul infinitésimal. Exemple.

§ IV. — Infiniment petits de divers ordres. Théorème. Résumé du chapitre Ier. Deux problèmes généraux à résoudre. Calcul différentiel. Calcul intégral.

§ I. — BUT GÉNÉRAL DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

1. — Le but qu'on se propose en général, dans l'application des sciences mathématiques, est la détermination de certaines grandeurs inconnues, dépendant d'autres grandeurs qui sont connues.

On se proposera par exemple, en mécanique appliquée, de déterminer les dimensions d'une poutre métallique, connaissant les efforts auxquels elle doit être soumise et la pression que peut supporter, par unité de surface, le métal dont elle est formée. Ou encore on cherchera à établir le débit d'une conduite d'eau, connaissant sa section, sa pente longitudinale, etc.

Pour évaluer ces grandeurs inconnues, on cherche à établir les relations qui les lient aux grandeurs connues dont elles dépendent.

Ces relations, il arrive fréquemment qu'il est très difficile, ou même impossible de les déterminer directement, par la simple comparaison des grandeurs connues aux grandeurs inconnues. Le plus souvent on est obligé, pour les établir, d'avoir recours à des moyens détournés.

Ces moyens sont fournis, dans un très grand nombre de cas, par les ressources du calcul infinitésimal.

Avant d'aller plus loin et d'exposer quel est l'objet du calcul infinitésimal, nous allons donner quelques définitions.

§ II. — DÉFINITIONS

2. — On appelle *variable*, une grandeur susceptible d'avoir différentes valeurs.

3. — On dit qu'une variable est *indépendante*, quand les valeurs qu'on lui donne sont complètement arbitraires.

4. — Quand la valeur d'une variable *dépend*[1] des valeurs attribuées à une ou plusieurs autres variables, on dit que la première est une *fonction* des secondes. La surface d'un cercle est fonction de son rayon ; la surface d'un triangle est fonction de sa base et de sa hauteur. La valeur d'une expression algébrique est une fonction de la valeur attribuée aux lettres qui y figurent. En effet, la valeur de l'expression $x^2 + 8z + 4t^3 + 5u^2$ par exemple, dépend évidemment des valeurs attribuées aux lettres x, z, t, u.

Si une variable y est une fonction de x, z, t, u, on dit que cette fonction est connue, quand on sait écrire, au moyen des notations de l'algèbre, une expression égale à y et ne renfermant que les variables x, z, t, u, et des quantités constantes. Si par exemple on peut poser :

$$y = x^2 + 3z + 4t^3 + 5u^2$$

[1] Il faut bien fixer la valeur du mot *dépend*. En disant qu'une variable dépend d'une ou plusieurs autres, nous entendrons que, pour que la valeur de cette variable soit déterminée, il faut et il suffit que les valeurs de la variable ou des variables, dont nous disons qu'elle dépend, soient déterminées.

y est une fonction connue de x, z, t, u. L'équation [1] ci dessus est la relation qui lie la fonction aux variables x, z, t, u, dont elle dépend.

Il peut se faire que y soit une fonction de x, z, t, u, c'est-à-dire que la valeur de y dépende des valeurs attribuées aux variables x, z, t, u, sans que pour cela on connaisse une expression égale à y et ne renfermant que les lettres x, z, t, u. On dit dans ce cas que y est une fonction inconnue de x, z, t, u.

Nous verrons plus loin que, pour résoudre une question de mathématiques, on est généralement ramené à s'efforcer de déterminer une fonction inconnue, c'est-à-dire, par exemple, en reprenant les notations ci-dessus, de trouver une expression de x, z, t, u, qui soit égale à la fonction y.

D'une manière générale, on exprime qu'une variable y est fonction des variables x, z, t, u..., en posant l'égalité :

$$y = f(x, z, t, u \ldots)$$

qui s'énonce : *y égale fonction de x, y, t, u...* ou simplement : *y égale f de x, z, t, u...*

5. — Une fonction est *explicite*, lorsqu'elle est liée aux variables dont elle dépend par une équation résolue par rapport à la fonction.

Exemple:

$$y = 4x^2 + 35x + 4$$

y est une fonction explicite de x. On voit que dans ce cas, lorsqu'on connaît une valeur de la variable x, on en déduit immédiatement la valeur correspondante de la fonction y en effectuant des opérations *explicitement* indiquées.

[1] Rappelons ici que les égalités, en algèbre, se divisent en *identités* et en *équations*.

Une identité est une égalité satisfaite pour toute valeur attribuée aux lettres.

Par exemple : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ est une identité, car cette égalité est vérifiée quelle que soit la valeur que l'on donne aux lettres a et b.

Une équation est une égalité qui n'est satisfaite que pour certaines valeurs attribuées aux lettres qui y figurent. Exemples : $3x = 39$ est une équation, car cette égalité n'est vérifiée que si on donne à x la valeur $x = 13$.

6. — Une fonction est *implicite*, quand elle est liée aux variables dont elle dépend par une équation non résolue.

Exemple :

$$3y^2 + 5x^2 - xy + 7x = 9 \qquad (1)$$

y est une fonction implicite de x.

Remarque 1. — Pour rendre explicite une fonction implicite, il suffit de résoudre, par rapport à la fonction, l'équation qui lie celle-ci aux variables dont elle dépend. En résolvant par rapport à y l'équation précédente, on a:

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4 \times 3(5x^2 + 7x - 9)}}{2 \times 3}$$

On voit que y se trouve mis, de la sorte, sous la forme d'une fonction explicite de x.

Remarque 2. — L'équation qui lie une fonction aux variables dont elle dépend, peut toujours être mise sous la forme d'une égalité dont le second membre est zéro. Il suffit pour cela, si l'équation ne satisfait pas à cette condition, de faire passer dans le premier membre, en les changeant de signes, tous les termes du second membre. L'équation (1) pourrait, par exemple, s'écrire :

$$3y^2 + 5x^2 - xy + 7x - 9 = 0$$

Le premier membre est alors une expression où ne figurent, outre les quantités constantes, que la fonction et les variables dont elle dépend : dans l'exemple ci-dessus, la fonction y et la variable x dont elle dépend. Ce premier membre est donc lui-même une fonction de x et de y, puisque sa valeur dépend des valeurs de x et de y. Si on le désigne par la notation habituelle $f(x, y)$ on aura :

$$f(x, y) = 0$$

On voit donc que, pour exprimer que y est une fonction de x, on peut écrire soit:

$$y = f(x)$$

Soit :

$$f(x, y) = 0$$

7. — On dit qu'une fonction, rendue explicite, est *algébrique*, quand les opérations qu'il faut faire pour déduire sa valeur de celles des variables indépendantes sont : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation aux puissances connues, l'extraction des racines de degré connu.

Une fonction algébrique est *entière*, quand elle ne renferme pas les variables en dénominateur. Elle est *rationnelle*, quand elle ne les contient pas sous des radicaux.

Exemples :

$$y = 3x^2 + 9x + 4$$

y est une fonction entière et rationnelle de x.

$$y = \frac{4x^3 + 5tx + 7}{x^4 + 3t + 2}$$

y est une fonction rationnelle, mais non entière, de x et de t.

$$y = \sqrt{9\,ux + 3u^2 + 47x^2 + 2}$$

y est une fonction irrationnelle de u et de x.

8. — Une fonction qui n'est pas algébrique, est dite *transcendante*.

Exemples :

$$y = \sin x$$
$$y = a^x$$
$$y = \log x$$

9. — On dit qu'une variable varie d'une manière *continue*, lorsqu'elle ne peut passer d'une valeur à une autre sans prendre successivement toutes les valeurs intermédiaires.

On dit qu'une fonction est *continue*, lorsque, si on fait varier les variables indépendantes d'une manière continue, la fonction, elle aussi, varie d'une manière continue.

En général, les fonctions que l'on rencontre dans la pratique sont des fonctions continues.

10. — Représentation géométrique des fonctions d'une et de deux variables indépendantes.

On peut, par une interprétation géométrique, figurer aux yeux

la variation d'une fonction de une ou de deux variables indépendantes.

Soit d'abord :

$$y = f(x) \tag{1}$$

une fonction continue d'une variable indépendante x,

Traçons (fig. 1) dans un plan deux droites xx', yy', se coupant en O. A partir de ce point O, portons sur la droite xx' des longueurs qui représentent, à une échelle donnée, les valeurs arbitraires que nous donnons successivement à la variable x. Nous porterons les valeurs positives de O vers x, les valeurs négatives de O vers x'. Soit O P $= x_1$, une certaine valeur de x. Quand x aura cette valeur x_1, la fonction y aura une certaine valeur correspondante $y_1 = f(x_1)$ donnée par l'équation (1). Soit O Q cette valeur de y_1, mesurée à l'échelle du dessin. Portons O Q à partir du point O sur la droite yy', de O vers y, si y_1 est positif, de O vers y', si y_1 est négatif.

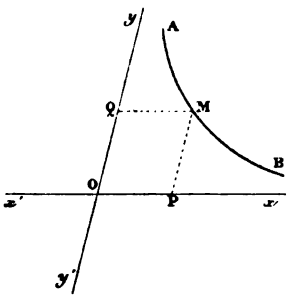

Fig. 1.

Par le point P, menons une parallèle à yy'. Par le point Q, menons une parallèle à xx'. Soit M le point d'intersection de ces deux droites.

La position du point M dans le plan représentera les valeurs simultanées x_1, y_1, de la variable x et de sa fonction y.

Il est clair, en effet, que la position du point M détermine les valeurs O P, O Q, d'x_1 et d'y_1, et que réciproquement ces valeurs déterminent la position du point M.

Si nous faisons varier x d'une manière continue, la fonction y, qui, par hypothèse, est continue, va varier aussi d'une manière continue. Le point M va donc prendre dans le plan une série de positions successives, en décrivant une courbe A B qui est la *courbe représentative de la fonction* $y = f(x)$.

Les longueurs O P et O Q sont dites les *coordonnées* du point M. La longueur O P s'appelle l'*abscisse*, la longueur O Q l'*ordonnée*. La droite xx' s'appelle l'*axe des x*, la droite yy', l'*axe des y*, toutes deux

indistinctement : les *axes des coordonnées*. Le point O s'appelle l'*origine des coordonnées*.

Nous venons d'établir qu'une fonction continue d'une variable indépendante pouvait être toujours représentée par une courbe plane. Réciproquement, une courbe plane peut toujours être représentée par une fonction d'une variable indépendante.

En effet, soit A B une courbe plane (fig. 1) et deux axes de coordonnées xx', yy', tracés dans son plan. Soit M un point de la courbe, O P et O Q ses coordonnées. Si nous faisons mouvoir le point M sur la courbe A B, à chaque valeur de l'abscisse O Q $= x$, correspond une valeur bien déterminée de l'ordonnée O P $= y$; y prend donc une valeur déterminée pour chaque valeur donnée arbitrairement à x; donc y dépend de x, *y est une fonction de x*, et on peut écrire :

$$y = f(x)$$

ou, ce qui revient au même (voir la *Remarque 2* du *n° 6*) :

$$f(x, y) = 0$$

Cette égalité est ce qu'on appelle l'*équation de la courbe* A B.

Ce mode de représentation des courbes planes permet de traiter par l'algèbre les problèmes de géométrie plane.

On voit d'une manière semblable qu'on peut représenter par une surface une fonction de deux variables indépendantes :

$$z = f(x, y) \qquad (2)$$

Menons dans l'espace trois axes de coordonnées, xx', yy', zz', qui se coupent en un point O (fig. 2). Donnons à x et à y des valeurs arbitraires x_1, y_1, que nous portons dans l'équation (2).

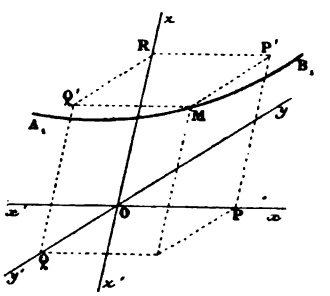

Fig. 2.

Cette équation nous donne pour z une certaine valeur correspondante z_1. Portons sur les trois axes, à partir du point O, des longueurs O P, O Q, O R, respectivement égales à x_1, y_1, z_1. Par les points P, Q, R, menons des plans respectivement parallèles aux plans, yoz, xoz, xoy. Ces trois plans

se coupent en un point M. La position de ce point M dans l'espace représente les valeurs considérées des variables x, y et de la fonction z.

Supposons maintenant que, z conservant la valeur z_1, x_1 et y_1 varient de telle manière que l'équation (2) soit constamment satisfaite; z restant constant, le point M va se déplacer dans le plan M P′ Q′ parallèle à xoy; les longueurs M Q′, M P′ respectivement égales à O P, O Q, sont égales à x_1 et y_1, et représentent les coordonnées du point M rapporté aux axes R P′, R Q′ dans le plan M P′ Q′. Le point M, dont les coordonnées x_1, y_1 satisfont à l'équation :

$$f(x_1, y_1) = z_1$$

dans laquelle z_1 est constant, va donc décrire, en vertu de ce que nous avons dit plus haut, une courbe $A_1 B_1$ dans le plan M P′ Q′.

Si maintenant nous faisons varier z en lui donnant des valeurs successives z_2, z_3 ..., nous trouverons, pour cette série de valeurs de z, une série de courbes telles que la courbe $A_1 B_1$, toutes situées dans des plans parallèles à xoy.

z variant d'une manière continue, cette courbe variera d'une manière continue en occupant une série de positions parallèles au plan xoy. Elle engendrera une surface qui sera le lieu géométrique des points dont les coordonnées satisfont à l'équation (2). Cette surface représentera la fonction $z = f(x, y)$.

Réciproquement, toute surface pourra être représentée par une équation de la forme $z = f(x, y)$, ou plus généralement :

$$f(x, y, z) = 0$$

On le prouvera par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait dans le cas d'une courbe plane.

11. — On appelle *limite* d'une variable, une quantité constante telle que la différence entre la variable et cette quantité constante peut devenir plus petite que toute quantité donnée. On dit alors que la variable *tend* vers la constante qui est sa limite.

Si, par exemple, on considère un polygone régulier inscrit dans un cercle fixe, et si le nombre des côtés du polygone augmente

indéfiniment, le périmètre du polygone varie en *tendant* vers le périmètre de la circonférence. Ce dernier périmètre est la *limite* vers laquelle tend le périmètre du polygone régulier.

12. — Quand une variable a zéro pour limite, on dit qu'elle est *infiniment petite* ou que c'est un *infiniment petit*.

En reprenant l'exemple du numéro précédent, le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle fixe devient infiniment petit quand le nombre des côtés augmente indéfiniment.

§ III. — OBJET PRATIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL

13. — Nous avons exposé au numéro 1 que les questions que l'on rencontre dans l'application des sciences mathématiques ont pour but général de déterminer des grandeurs inconnues, connaissant d'autres grandeurs dont les premières dépendent.

Pour y parvenir, nous avons dit qu'on était conduit à rechercher les relations qui lient les grandeurs inconnues aux grandeurs connues.

Supposons, pour fixer les idées, que a, b, c désignent trois grandeurs dépendant les unes des autres, c'est-à-dire telles que l'une quelconque d'entre elles soit déterminée quand les deux autres le sont. Supposons que b et c, par exemple, sont connues. Nous nous proposons de déterminer la grandeur a.

Dire que les grandeurs a, b, c dépendent les unes des autres, c'est dire que l'une quelconque d'entre elles dépend des deux autres, ce que l'on exprime en écrivant :

$$a = F(b, c)$$

ou, ce qui revient au même (voir *Remarque* 2 du *Numéro* 6) :

$$F_1(a, b, c) = 0 \qquad (1)$$

C'est cette équation (1) qui constitue la relation liant entre elles les quantités a, b, c. Si nous la connaissions, nous n'aurions qu'à la résoudre par rapport à a, et la question serait résolue.

Donc nous sommes conduits à chercher à établir une équation ayant la forme de l'équation (1).

Si des considérations simples nous permettent d'établir directement une équation de cette forme, la question peut être considérée comme résolue.

Mais très souvent, il sera extrêmement difficile, ou même impossible, de comparer entre elles les grandeurs a, b, c et d'établir une équation telle que l'équation (1).

Supposons que nous nous trouvions en pareil cas. Nous allons alors *choisir des variables*, c'est-à-dire nous allons introduire dans la question des variables x, y, z, que nous choisirons de manière qu'elles satisfassent aux deux conditions ci-dessous :

1° L'une quelconque des variables x, y, z, sera déterminée quand les autres seront déterminées, les quantités a, b, c, étant d'ailleurs considérées comme connues.

2° Ces variables pourront prendre un système de valeurs simultanées x_1 y_1, z_1, qui seront des fonctions connues de a, b, c[1], et dont l'une au moins renfermera a, qui est l'inconnue de la question. On aura :

$$x_1 = f_1(a, b, c),\ y_1 = f_2(a, b, c),\ z_1 = f_3(a, b, c)$$

Puisque l'une quelconque de nos variables, x par exemple, est déterminée quand les autres le sont et qu'on connaît les valeurs de a, de b et de c, x est une fonction de y, z, a, b, c, et on peut écrire :

$$F_2(x, y, z, a, b, c) = 0 \qquad (2)$$

Si on peut établir cette équation (2), il est clair que le problème sera résolu. En effet, cette équation étant vraie par toutes les valeurs que prennent simultanément les variables x, y, z, elle sera vraie en particulier quand ces variables prendront les valeurs x_1, y_1, z_1, et l'on aura :

$$F_2(x_1, y_1, z_1, a, b, c) = 0$$

ou en remplaçant x_1, y_1, z_1, par leurs valeurs en fonction de a, b, c :

$$F_2[f_1(a, b, c), f_2(a, b, c), f_3(a, b, c), a, b, c] = 0 \qquad (3)$$

Le premier membre de l'équation (3) ne renfermera plus d'autres

[1] C'est-à-dire des expressions algébriques connues ne renfermant que a, b, c et des quantités connues. (Voir n° 4.)

quantités que a, b, c et des quantités connues. Ce sera donc une équation de la forme de l'équation (1), et le problème sera résolu.

Donc, nous sommes conduits à chercher entre x, y, z, a, b, c, une relation de la forme de l'équation (2).

En général, une équation telle que l'équation (2) ne sera pas plus facile à établir directement que l'équation (1). Mais on pourra arriver à l'établir indirectement de la manière suivante :

Considérons deux systèmes de valeurs attribuées aux variables x, y, z, et supposons que ces deux systèmes soient très voisins l'un de l'autre. Désignons le premier par x, y, z ; le second par $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$; Δx, Δy, Δz, désignant les accroissements simultanés que prennent les variables en passant du premier système au second. Si nous supposons que les valeurs de x, y et z sont déterminées ainsi que les valeurs de Δx et de Δy, les valeurs de $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ sont déterminées, et par suite il en est de même de la valeur de $z + \Delta z$, puisque les valeurs de ces trois dernières quantités satisfont à l'équation (2), et que l'on a :

$$F_2 [(x + \Delta x)\ (y + \Delta y)\ (z + \Delta z),\ a,\ b,\ c] = 0$$

$z + \Delta z$ étant déterminé ainsi que z, Δz l'est également. Donc, quand on connaît x, y, z, Δx, et Δy, Δz est déterminé. Donc Δz est une fonction de x, y, z, Δx et Δy et on peut poser :

$$F_3\ (x,\ y,\ z,\ \Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z,\ a,\ b,\ c) = 0 \qquad (4)$$

Or, alors qu'il est très difficile, ou même impossible, d'établir directement des équations telles que les équations (1) ou (2), il est souvent beaucoup plus facile d'établir des relations telles que l'équation (4) entre les variables x, y, z, et les accroissements Δx, Δy, Δz, que prennent simultanément ces variables, lorsque ces accroissements tendent vers zéro, c'est-à-dire deviennent infiniment petits.

Dès lors, si nous connaissons un moyen qui, d'une relation telle que l'équation (4) entre les variables x, y, z, et leurs accroissements infiniment petits simultanés, nous permette de passer à une relation entre ces variables finies seulement, nous pourrons établir une relation telle que l'équation (2) entre les variables x, y, z, et par suite nous aurons résolu la question.

Ce moyen nous le trouvons dans les ressources du calcul infinitésimal.

Nous allons, pour rendre plus claires les considérations qui précèdent, les appliquer à un exemple.

14. — Exemple. — Trouver la surface d'une ellipse déterminée par ses axes.

Soit (fig. 3) une ellipse ayant pour axes A A′ et B B′; appelons a le demi-grand axe O A, b le demi-petit axe O B; désignons par A la surface A O B du quart de l'ellipse. La surface totale sera égale à $4 \times A$.

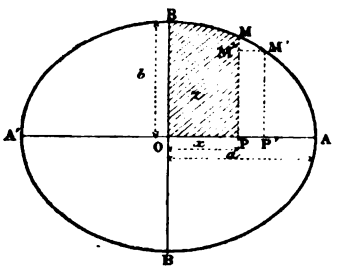

Fig. 3.

Pour résoudre la question il nous suffirait de connaître une relation entre a, b et A, de la forme :

$$f(a, b, A) = 0 \qquad (1)$$

En effet, si nous résolvions cette équation par rapport à A, nous aurions une égalité de la forme :

$$A = f(a, b)$$

qui répondrait évidemment à la question.

Donc, nous sommes conduit à chercher à établir une relation entre a, b et A.

Il serait très difficile d'y arriver directement. Pour résoudre la question, nous allons procéder comme il a été dit au numéro précédent.

Nous allons introduire dans la question deux variables, x, z, définies comme il suit :

D'un point M de l'ellipse abaissons M P perpendiculaire sur le grand axe A A′; nous désignerons par x la longueur O P, et par z la surface du quadrilatère mixtiligne B O P M. Nous allons voir que ces variables satisfont bien aux deux conditions énoncées au numéro précédent.

1° Chacune d'elles est déterminée quand l'autre est déterminée. En effet, si nous nous donnons la longueur O P $= x$, il est clair

que la surface BOPM a une valeur bien déterminée. Réciproquement, si nous nous donnons la valeur de cette surface, la droite MP aura une position bien déterminée, et par suite x sera déterminé.

2° Quand le point P coïncide avec le point A, x prend une valeur connue qui est égale à a, et z a pour valeur A. Les deux variables admettent donc un système de valeurs simultanées $x = a$, $z = A$, qui sont connues en fonction des quantités a, b, A, et dans lesquelles entre la quantité A, qui est l'inconnue de la question.

Puisque les variables x et z dépendent l'une de l'autre, a, b, A étant d'ailleurs des quantités constantes et déterminées, il existe une équation de la forme :

$$F(x, z, a, b, A) = 0 \qquad (2)$$

Cette équation, étant vérifiée par tout système de valeurs correspondantes données aux variables x et z, sera vérifiée en particulier quand on y fera $x = a$, $z = A$.

Si donc nous connaissions cette équation, nous pourrions y remplacer x par a et z par A, et nous aurions ainsi une équation ne renfermant plus que a, b, A, c'est-à-dire une équation de la forme de l'équation (1), répondant par suite à la question.

Mais nous ne pourrons pas établir directement une équation de la forme de l'équation (2).

Considérons alors deux systèmes très rapprochés de valeurs de x et de z. Supposons que le point M′ soit très rapproché de M. Si nous désignons par Δx et Δz les accroissements que prennent les variables x et z en passant des valeurs OP, OPMB, aux valeurs OP′, OBM′P′, nous avons ;

$$\Delta x = PP'$$
$$\Delta z = MPP'M'$$

Si on connaît x, z et Δx, il est certain que, les points P et P′ étant déterminés, les surfaces OBMP, OBM′P′ sont déterminées et qu'il en est de même de leur différence MPP′M′, ou Δz. Donc Δz est déterminé, quand on connaît x, z et Δx ; par conséquent, il existe une équation de la forme :

$$F(x, z, \Delta x, \Delta z, a, b, A) = 0 \qquad (3)$$

Nous allons voir que, en supposant que Δx et Δz tendent vers zéro, cette dernière relation est facile à établir.

En effet menons par le point M', M'M'' parallèle à A A', Soit M'' le point où cette droite rencontre la droite M P. Nous avons :

$$\Delta z = \text{surf. } MM'P'P = \text{rect. } M'M''PP' + \text{tria. } MM'M''$$

Le triangle MM'M'' est très petit en comparaison du rectangle M'M''PP'. En effet, le second est égal à M'P' × P P'. Le premier, en l'assimilant à un triangle rectiligne, est égal à 1/2 MM'' × PP''; sa surface est donc, avec celle du rectangle, dans le rapport de $\frac{1/2\, MM''}{M'P'}$. Ce rapport est très petit. Quand le point M' tend vers le point M, c'est-à-dire quand Δx et Δz deviennent infiniment petits, nous verrons, par un théorème qui sera démontré plus loin, que le triangle peut être négligé devant le rectangle et qu'on peut écrire à la limite :

$$\Delta z = \text{surf } M'M''P'P = \Delta x \times MP \tag{4}$$

Or MP, dans l'ellipse, est évidemment déterminé quand on connaît OP, c'est-à-dire x, connaissant d'ailleurs les longueurs a et b qui déterminent la forme de l'ellipse; MP, que nous désignerons par y, est donc une fonction de x. L'équation qui lie y à x (voir au n° 10) est l'*équation de l'ellipse*, en prenant A A' et B B' pour axes de coordonnées. Cette équation, que nous apprendrons à déterminer plus tard, est la suivante :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

La quantité y, que nous introduisons ainsi dans la question, est ce qu'on appelle une *variable auxiliaire*.

De cette équation (5) nous tirons :

$$MP = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Portons cette valeur de MP dans l'équation (4), nous avons :

$$\Delta z = \Delta x \times \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{6}$$

c'est-à-dire une relation de la forme de l'équation (3).

Nous verrons plus loin comment les procédés du calcul infinitésimal nous permettront de déduire de cette équation (6) entre x, Δz, Δx, une équation entre x et z, qui est la suivante :

$$z = \frac{ab}{2}\left[arc\ sin\ \frac{x}{a} - \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right]$$

Cette équation est l'équation (2) dont nous avons parlé ci-dessus.

Donnons à x et à z les valeurs simultanées $x = a$, $z = A$, nous avons :

$$A = \frac{ab}{2}\left[arc\ sin\ 1 - 1 \times 0\right] = \frac{ab}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\, ab}{4}$$

Et la surface de l'ellipse est égale à $4A$ ou à πab.

On voit que la simplification apportée dans la question par la considération des quantités infiniment petites Δx, Δz, résulte de ce que nous avons négligé, dans l'évaluation de la surface MM′PP′, le triangle MM″M′ devant le rectangle M′M″PP′. Nous allons montrer que nous avons le droit d'opérer de la sorte et nous pourrons compléter ainsi les explications qui précèdent.

§ IV. — INFINIMENT PETITS DE DIVERS ORDRES

15. — Définition. — Dans une même question on rencontrera simultanément plusieurs infiniment petits, c'est-à-dire plusieurs variables tendant à la fois vers zéro. Nous choisirons un de ces infiniment petits α, auquel nous comparerons tous les autres. Soit α' un autre infiniment petit. Si le rapport $\frac{\alpha'}{\alpha}$ tend vers une limite finie quand α et α' tendent vers zéro, on dit que α' est *un infiniment petit du premier ordre;* si le rapport $\frac{\alpha'}{\alpha}$ tend vers zéro, on dit que α' est *un infiniment petit d'ordre supérieur au premier.* Dans ce cas, il arrive en général que pour une puissance n de α convenablement choisie, $\frac{\alpha'}{\alpha^n}$ tend vers une limite finie. On dit alors que α' est *un infiniment petit d'ordre n.*

16. — Théorème. Dans le calcul d'une somme ou d'un rapport d'infiniment petits, on peut négliger les infiniment petits d'ordres supérieurs.

1° Soient α, β, deux infiniment petits du premier ordre, α', β', deux infiniment petits ne différant d'α et de β que de quantités infiniment petites d'ordre supérieur à α et β. Je dis que les rapports $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha'}{\beta'}$ sont égaux.

En effet, d'après la définition donnée au n° 15, α et α', β et β', ne différant que d'infiniment petits d'ordre supérieur au premier, $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$ sont des infiniment petits d'ordre supérieur au premier, et par suite le rapport de ces infiniment petits à des infiniment petits du premier ordre tend vers zéro; on a donc :

$$\text{limite } \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha} = 0$$

$$\text{limite } \frac{\beta' - \beta}{\beta} = 0$$

Mais on a d'ailleurs :

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha'}{\alpha} - 1$$

$$\frac{\beta' - \beta}{\beta} = \frac{\beta'}{\beta} - 1$$

Donc, puisqu'on a :

$$\text{limite } \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha} = 0$$

on a :

$$\text{limite } \frac{\alpha'}{\alpha} - 1 = 0 \text{ ou limite } \frac{\alpha'}{\alpha} = 1$$

on démontrera de même :

$$\text{limite } \frac{\beta'}{\beta} = 1$$

Donc les rapports $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\beta}$ tendent vers l'unité, et par conséquent les rapports inverses $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$ tendent aussi vers l'unité. Or, on a :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \times \frac{\alpha}{\alpha'} \times \frac{\beta'}{\beta}$$

Mais à la limite :

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 ; \frac{\beta'}{\beta} = 1$$

Donc on a :

$$\text{limite } \frac{\alpha}{\beta} = \text{limite } \frac{\alpha'}{\beta'}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

2° Soient $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots\ldots + \alpha_n$, une somme d'infiniment petits de même ordre, $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 \ldots\ldots + \alpha'_n$, une somme d'infiniment petits différant respectivement d'α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$, d'infiniment petits d'ordre supérieur. Je dis que les deux sommes sont égales à la limite quand α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$, α'_1, α'_2, $\alpha'_3 \ldots\ldots \alpha'_n$, tendent vers zéro.

En effet α'_1, différant de α_1 d'une quantité infiniment petite d'ordre supérieur, on a par définition (voir n° 15) :

$$\text{limite } \frac{\alpha'_1 - \alpha_1}{\alpha_1} = 0$$

ou, ce qui revient au même :

$$\text{limite } \frac{\alpha'_1}{\alpha_1} - 1 = 0$$

ou encore :

$$\frac{\alpha'_1}{\alpha_1} = 1 + \varepsilon_1 \qquad (1)$$

ε_1 désignant une quantité qui tend vers zéro en même temps qu'α et α'_1 :

On trouvera de même :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\alpha'_2}{\alpha_2} = 1 + \varepsilon_2 \\ \dfrac{\alpha'_3}{\alpha_3} = 1 + \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \dfrac{\alpha'_n}{\alpha_n} = 1 + \varepsilon_n \end{array}\right\} (1)$$

ε_2, ε_3, ... ε_n, désignant des quantités qui tendent vers zéro en même temps que α_1, α_2, α_3, ... α_n, α'_1, α'_2, α'_3, ... α'_n.

En multipliant les deux membres de chacune des égalités (1) respectivement par α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$, on en déduit :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha'_1 = \alpha_1 + \alpha_1\,\varepsilon_1 \\ \alpha'_2 = \alpha_2 + \alpha_2\,\varepsilon_2 \\ \alpha'_3 = \alpha_3 + \sigma_3\,\varepsilon_3 \\ \vdots \qquad \vdots \\ \alpha'_n = \alpha_n + \alpha_n\,\varepsilon_n \end{array}\right\} \quad (2)$$

Additionnons membre à membre les égalités (2), nous avons :

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \ldots + \alpha'_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \alpha_1\,\varepsilon_1 + \alpha_2\,\varepsilon_2 + \alpha_3\,\varepsilon_3 + \ldots + \alpha_n\,\varepsilon_n$$

Divisons les deux membres de cette égalité par la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n$ il vient :

$$\frac{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \ldots\ldots + \alpha'_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n} = 1 + \frac{\alpha_1\,\varepsilon_1 + \alpha_2\,\varepsilon_2 + \alpha_3\,\varepsilon_3 + \ldots\ldots \alpha_n\,\varepsilon_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n} \quad (3)$$

Désignons par η la plus grande des quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots\ldots \varepsilon_n$; η tendra vers zéro en même temps que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots\ldots \alpha'_n$. D'ailleurs nous aurons :

$$\begin{array}{l} \alpha_1\,\varepsilon_1 < \alpha_1\,\eta \\ \alpha_2\,\varepsilon_2 < \alpha_2\,\eta \\ \vdots \qquad \vdots \\ \alpha_n\,\varepsilon_n < \alpha_n\,\eta \end{array}$$

et par conséquent :

$$\alpha_1\,\varepsilon_1 + \alpha_2\,\varepsilon_2 + \alpha_3\,\varepsilon_3 + \ldots\ldots + \alpha_n\,\varepsilon_n < \eta\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)$$

et enfin :

$$\frac{\alpha_1\,\varepsilon_1 + \alpha_2\,\varepsilon_2 + \alpha_3\,\varepsilon_3 + \ldots\ldots + \alpha_n\,\varepsilon_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n} < \eta \quad (4)$$

Mais η tendant vers zéro, le premier membre de l'inégalité (4) tend à plus forte raison vers zéro. Or ce premier membre n'est autre chose que le rapport qui figure dans le second membre de l'égalité (3). Ce rapport tendant vers zéro en même temps que α_1, $\alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3 \ldots, \alpha'_n$, l'égalité (3) nous donne :

$$\text{limite}\ \frac{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \ldots\ldots + \alpha'_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n} = 1$$

ou, ce qui revient au même :

limite de $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \ldots\ldots + \alpha'_n$ = limite de $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n$

Ce qu'il fallait démontrer.

17. — Ce théorème nous montre pour quelle raison il est plus facile d'établir des relations entre les accroissements infiniment petits simultanés de variables qui dépendent les unes des autres, plutôt qu'entre ces variables finies elles-mêmes. Ainsi, si nous nous reportons à l'exemple du numéro 14, nous voyons que nous n'avions aucun moyen direct d'évaluer, en fonction de x, la surface z du quadrilatère mixtiligne O B M P. Ce qui nous en empêchait, c'était la courbure d'un des côtés de ce quadrilatère, l'arc d'ellipse B M. Mais quand, au lieu de chercher une relation entre x et z, nous avons cherché une relation entre les accroissements infiniment petits simultanés P P′ et M M′ P′ P de ces deux variables, nous avons remarqué que le quadrilatère mixtiligne M M′ P′ P pouvait être considéré comme étant la somme de deux surfaces, le rectangle M′ M″ P P′, que nous savons évaluer par les méthodes de la géométrie élémentaire, et le triangle mixtiligne M′ M″ M. Or, il est aisé de voir que la surface de ce triangle est un infiniment petit du second ordre par rapport au rectangle M″ M′ P′ P. En effet (fig. 4), menons la tangente M′ M‴ à l'ellipse au point M′, et soit M‴ le point où cette droite rencontre la droite M P. Nous avons évidemment :

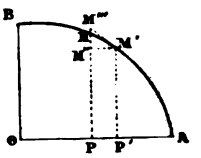

Fig. 4.

$$\text{triangle mixtiligne } M\,M'\,M'' < \text{triangle rectiligne } M'\,M''\,M''' \qquad (1)$$

D'ailleurs on a :

$$\text{triangle } M'\,M''\,M''' = \frac{1}{2}\,M''\,M''' \times M'\,M''; \text{ rectangle } M'\,M''\,P\,P' = M'\,P' \times M'\,M''$$

Le rapport de ces deux surfaces est donc :

$$\frac{\text{triangle } M'\,M''\,M'''}{\text{rectangle } M'\,M''\,P\,P'} = \frac{M''\,M'''}{2\,M'\,P'}$$

Mais quand le point M′ tend vers le point M, M′ P′ tend vers M P. D'ailleurs les points M″, M‴, tendent à se confondre avec M, et par suite M″ M‴ tend vers zéro.

Donc à la limite on a :

$$\text{limite } \frac{\text{triangle } M'\,M''\,M'''}{\text{rectangle } M'\,M''\,P\,P'} = 0$$

et, en vertu de l'inégalité (1) ci-dessus, nous avons, à plus forte raison :

$$\text{limite } \frac{\text{triangle mixtiligne } MM'M''}{\text{rectangle } M'M''PP'} = 0$$

Donc enfin, ce triangle mixtiligne est infiniment petit d'ordre supérieur au rectangle, et peut être négligé devant lui.

On voit donc que, lorsque nous comparons les accroissements simultanés infiniment petits Δx, Δz des variables x et z, au lieu de comparer ces variables finies elles-mêmes, nous n'avons qu'à évaluer un quadrilatère rectiligne dont nous connaissons la mesure, au lieu d'évaluer un quadrilatère mixtiligne dont nous ne connaissons pas la mesure, et cette simplification vient de ce que l'influence de la courbure du côté B M ne porte plus que sur le triangle mixtiligne M M″M′, que nous pouvons laisser de côté comme étant infiniment petit d'ordre supérieur.

On voit, par cet exemple, que c'est pour une raison fort simple que les relations entre les accroissements simultanés infiniment petits de variables dépendant les unes des autres, sont plus faciles à établir que les relations entre ces variables finies elles-mêmes.

18.—Résumé et conclusion.—En résumé, nous avons établi dans ce premier chapitre comment les questions qui se présentent dans l'application des sciences mathématiques, se ramènent à la recherche des relations ou des équations qui lient différentes grandeurs. Nous avons dit que, pour trouver ces relations, on commençait par faire choix de variables telles qu'une relation établie entre ces variables permette d'en déduire la relation cherchée entre les grandeurs considérées.

Nous en avons conclu que les questions à traiter se ramenaient à la recherche des relations ou équations liant les variables dont on a fait choix.

Nous avons exposé qu'il était souvent difficile ou impossible de comparer ces variables et d'établir directement les équations qui les lient.

Mais nous avons remarqué que si, au lieu de comparer ces variables finies, on comparait leurs accroissements infiniment petits simultanés, la question se trouvait très simplifiée, et qu'on pou-

vait souvent établir directement, sans difficulté, les équations liant entre eux ces accroissements infiniment petits simultanés.

Nous avons fait voir que cette simplification provenait de ce fait que, lorsqu'on compare ces accroissements infiniment petits simultanés, on peut négliger certaines quantités, infiniment petites d'ordres supérieurs à ceux-ci.

Dès lors nous avons ramené la question générale qui nous occupe au problème suivant :

Etant données les relations qui lient des variables dépendant les unes des autres aux accroissements infiniment petits simultanés de ces variables, en déduire les relations qui lient ces variables finies elles-mêmes.

Pour résoudre ce problème général, nous commencerons par résoudre le problème inverse, qui peut s'énoncer comme il suit :

Etant données les relations qui lient des variables dépendant les unes des autres, en déduire les relations qui lient les accroissements infiniment petits simultanés de ces variables.

Ce dernier problème, une fois résolu, nous permettra de résoudre le premier. Nous verrons, en outre, qu'il présente un intérêt propre dans un grand nombre de questions.

La solution du second problème constitue le **calcul différentiel**. Il fait l'objet du Livre Ier.

La solution du premier problème constitue le **calcul intégral**. Il fait l'objet du Livre II.

Les deux considérés simultanément constituent le **calcul infinitésimal**.

LIVRE PREMIER

CALCUL DIFFÉRENTIEL

CHAPITRE II

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES

ÉTANT DONNÉES LES RELATIONS QUI LIENT DES VARIABLES, EN DÉDUIRE LES RELATIONS QUI LIENT LEURS ACCROISSEMENTS INFINIMENT PETITS SIMULTANÉS

§ I. — Dérivées et différentielles d'une fonction d'une variable indépendante. Définitions.

§ II. — Recherche des dérivées des fonctions d'une variable indépendante. — A. Théorèmes généraux. Théorème des fonctions inverses; des fonctions de fonctions; des fonctions composées. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'une fraction. — B. Recherche directe des dérivées des fonctions simples. Dérivées des fonctions algébriques simples. Dérivée de x^m, de $\frac{1}{x^m}$. Exposant négatif. Dérivée de $\sqrt[m]{x}$. Exposant fractionnaire. Dérivées des fonctions transcendantes simples. Dérivées de *sin.* x, *cos.* x, *tg.* x, *cotg.* x, de *arc sin.* x, *arc cos.* x, *arc tg.* x, *arc cotg.* x. Dérivée de *log.* x de a^x. — C. Dérivée d'une fonction quelconque. Dérivées des fonctions implicites. Résumé des § I et II.

§ III. — Dérivées et différentielles d'ordres supérieurs au premier.

§ IV. — Différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes. Différentielles du premier ordre. Différentielles totales. Différentielles et dérivées partielles. Différentielles d'ordres supérieurs au premier.

§ I. — DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE

19. — Des dérivées. — Nous allons chercher la solution du problème énoncé en tête de ce chapitre, dans le cas où les variables sont au nombre de deux : une variable indépendante, et une fonction de cette variable indépendante.

Soit x la variable indépendante, y sa fonction; y est lié à x par l'équation :

$$y = f(x) \tag{1}$$

Nous nous proposons, en supposant connue cette relation, d'en

déduire la relation qui lie les accroissements infiniment petits simultanés de y et de x.

Donnons à x un accroissement arbitraire très petit Δx. Il en résulte pour y un accroissement correspondant Δy donné par l'équation :

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \tag{2}$$

Cette équation nous donne pour valeur de Δy :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

ou, en remplaçant y par sa valeur tirée de l'équation (1) :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{3}$$

Divisons les deux membres de cette équation (3) par Δx; nous avons :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

Si nous faisons tendre Δx vers zéro, Δy tendra vers zéro, et le second membre de l'équation (4) tendra vers une certaine limite que l'on appelle *la dérivée de la fonction y par rapport à x*. On désigne habituellement cette dérivée par la notation $f'(x)$ ou y'_x.

20. — Des différentielles. — La définition d'une dérivée est traduite par l'égalité.

$$\text{limite de } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \tag{1}$$

On peut donc écrire, en désignant par ε une quantité qui tend vers zéro en même temps que Δx et Δy :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par Δx, nous avons :

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \tag{2}$$

Le premier terme du second membre de cette équation (2) est

ce qu'on appelle *la différentielle de la fonction y;* on la désigne par la notation dy. On a par conséquent :

$$dy = f'(x)\,\Delta x \tag{3}$$

L'équation (2) peut donc s'écrire :

$$\Delta y = dy + \varepsilon\,\Delta x$$

et par suite on a :

$$\Delta y - dy = \varepsilon\,\Delta x$$

On voit donc que l'accroissement infiniment petit Δy de la fonction y, correspondant à l'accroissement infiniment petit Δx donné arbitairement à la variable indépendante, diffère de la différentielle dy de cette fonction; d'une quantité égale à $\varepsilon\Delta x$.

Cette quantité $\varepsilon\Delta x$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à Δy. En effet le rapport $\frac{\varepsilon\,\Delta x}{\Delta y}$ peut s'écrire $\frac{\varepsilon}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$; quand Δx tend vers zéro, ε tend vers zéro et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers la dérivée $f'(x)$ de y par rapport à x, en vertu de la définition même d'une dérivée. Or, nous verrons par la suite (n° 57) que la dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ a en général une valeur finie. Donc dans le rapport $\frac{\varepsilon}{f'(x)}$, quand Δx tend vers zéro, le numérateur tend vers zéro et le dénominateur reste fini : ce rapport tend donc lui-même vers zéro et il en est de même du rapport égal $\frac{\varepsilon\,\Delta x}{\Delta y}$. Donc, enfin, $\varepsilon\Delta x$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à Δy. (Voir la définition donnée au n° 15.)

La différentielle dy, qui diffère de Δy d'une quantité infiniment petite d'ordre supérieur, peut donc lui être substituée dans une somme ou un rapport d'infiniment petits, en vertu du théorème démontré au n° 16.

Remarquons que l'accroissement infiniment petit Δx de la variable indépendante est arbitraire. Pour la symétrie des écritures, on le désigne habituellement par dx. De sorte que l'équation (3) ci-dessus s'écrit :

$$dy = f'(x)\,dx$$

d'où on tire :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

On voit que la dérivée de y par rapport à x est égale au rapport $\frac{dy}{dx}$. C'est cette notation, plus commode et plus symétrique, que nous emploierons de préférence dans la suite.

21. — Il résulte des explications et définitions exposées dans le présent paragraphe, que la recherche de la relation qui lie les accroissements infiniment petits Δy et Δx ou dx, d'une variable et de sa fonction, se ramène à la recherche de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ de la fonction y par rapport à la variable indépendante x.

Cette recherche va faire l'objet du paragraphe suivant.

§ II. — RECHERCHE DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE

22. — Pour rechercher les dérivées des fonctions d'une variable indépendante qui se rencontrent dans la pratique, nous allons procéder comme il suit :

Nous établirons d'abord trois théorèmes généraux qui nous permettront, connaissant les dérivées de certaines fonctions, d'en déduire les dérivées d'autres fonctions plus compliquées. Nous déterminerons ensuite directement les dérivées de quelques fonctions simples, et nous ferons voir en dernier lieu comment, à l'aide des théorèmes généraux établis en premier lieu, nous pourrons, connaissant les dérivées des fonctions simples, en déduire les dérivées de la plupart des fonctions que nous rencontrerons dans la pratique.

A. — THÉORÈMES GÉNÉRAUX

23. — **Théorème I, dit des fonctions inverses.** — Soit une fonction y d'une variable indépendante x.

Ces deux variables sont liées par une équation :

$$y = f(x) \tag{1}$$

Cette équation peut être résolue par rapport à x, et mise sous

la forme d'une équation dont le premier membre sera x et le second ne renfermera que y, c'est-à-dire sera une certaine fonction de y. L'équation (1) ainsi transformée aura la forme :

$$x = \varphi(y) \tag{2}$$

Si dans le second membre de l'équation (1) nous mettons partout x à la place de y, nous obtenons une certaine fonction de x, $\varphi(x)$, qui est la *fonction inverse* de $f(x)$.

Exemple. — Supposons que y soit une fonction de $f(x)$ définie par l'équation :

$$y = x^m$$

En résolvant cette équation par rapport à x, on a :

$$x = \sqrt[m]{y} \tag{3}$$

Remplaçons, dans le second membre de l'équation (3), y par x; nous obtenons ainsi, pour ce second membre, une certaine fonction de x. Désignons-la par z. Nous avons :

$$z = \sqrt[m]{x}$$

z, ou $\sqrt[m]{x}$ est la fonction inverse de y, ou x^m.

Autre exemple. — Soit la fonction :

$$y = \sin x$$

Résolvons cette équation par rapport à x. Nous avons :

$$x = \text{arc sin } y^{1} \tag{4}$$

Dans le second membre de l'équation (4) remplaçons y par x. Ce second membre devient une certaine fonction de x, qui est *arc sin* x. Cette fonction est la fonction inverse de y ou de *sin* x.

Ceci posé, le théorème des fonctions inverses peut s'énoncer comme il suit :

[1] C'est-à-dire x est égal à l'arc dont le sinus est égal à y. Si par exemple y est égal à 1, $x = \frac{\pi}{2}$; si $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$.

24. — Quand on connaît une fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$, on obtient la dérivée $\varphi'(x)$ de la fonction $\varphi(x)$ inverse de $f(x)$, en prenant l'inverse $\frac{1}{f'(x)}$ de la dérivée de $f(x)$, et en y remplaçant x par $\varphi(x)$.

En effet, supposons que nous connaissions la fonction :

$$y = f(x) \tag{5}$$

et sa dérivée :

$$\text{limite } \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x = f'(x) \tag{6}$$

Nous avons d'ailleurs, en résolvant l'équation (1) par rapport à x :

$$x = \varphi(y) \tag{7}$$

Remplaçons dans l'équation (5) y par x et x par z. Nous avons :

$$x = f(z) \tag{8}$$

Les équations (6) et (7) sont des conséquences de l'équation (5) ; l'équation (8) entraînera donc les deux équations que nous obtiendrons en remplaçant dans les équations (6) et (7) y par x et x par z. Nous obtiendrons ainsi les deux équations suivantes :

$$\text{limite } \frac{\Delta x}{\Delta z} = x'_z = f'(z) \tag{9}$$

$$z = \varphi(x) \tag{10}$$

Les équations (8), (9) et (10), sont identiquement les mêmes que les équations (5), (6) et (7). La seule différence est qu'elles sont écrites avec d'autres notations.

Mais l'équation (10) nous montre que la fonction $z = \varphi(x)$ est précisément la fonction inverse de la fonction donnée $y = f(x)$.

D'autre part, l'équation (9) nous donne, en prenant l'inverse des deux membres :

$$\text{limite } \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{1}{f'(z)} \tag{11}$$

Dans l'équation (11) nous pouvons remplacer z par $\varphi(x)$, qui lui est égal en vertu de l'équation (10). Nous avons donc :

$$\text{limite } \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{1}{f'[\varphi(x)]}$$

Mais limite $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ n'est autre chose que la dérivée $\varphi'(x)$ de la fonction $z = \varphi(x)$. Donc on a :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'[\varphi(x)]}$$

ce qu'il fallait démontrer.

25. — Exemple. — Pour rendre plus claire la démonstration de ce théorème, nous allons la répéter sur un exemple. Prenons par exemple la fonction :

$$y = x^m \tag{12}$$

Supposons que nous connaissions la dérivée de x^m. Nous apprendrons un peu plus loin à la trouver. Elle a pour expression :

$$y'_x = m\, x^{m-1} \tag{13}$$

Résolvons l'équation (12) par rapport à x. Nous avons :

$$x = \sqrt[m]{y} \tag{14}$$

Si nous remplaçons dans l'équation (12) y par x et x par z, nous avons :

$$x = z^m \tag{15}$$

Il est bien évident que, puisque les équations (13) et (14) résultent de l'équation (12), si on y remplace, comme dans l'équation (12), y par x et x par z, les deux nouvelles équations ainsi obtenues résulteront de l'équation (15). Ces deux équations sont les suivantes :

$$x'_z = m\, z^{m-1} \tag{16}$$

$$z = \sqrt[m]{x} \tag{17}$$

Les équations (15), (16) et (17), ne sont autres que les équations (12), (13) et (14) écrites avec d'autres notations. L'équation (17) nous montre que la fonction z est la fonction inverse de la fonction donnée y. D'autre part, l'équation (16) peut s'écrire :

$$\text{limite } \frac{\Delta x}{\Delta z} = m\, z^{m-1}$$

Prenons l'inverse de ses deux membres, nous avons :

$$\text{limite } \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{1}{m\, z^{m-1}}$$

Mais on a :

$$\text{limite } \frac{\Delta z}{\Delta x} = z'_x$$

z'_x désignant la dérivée par rapport à x de la fonction z, inverse de $y = x^m$. On a donc :

$$z'_x = \frac{1}{m\, z^{m-1}}$$

et, en remplaçant z par sa valeur tirée de l'équation (17) :

$$z'_x = \frac{1}{m\left[\sqrt[m]{x}\right]^{m-1}}$$

On voit que, pour déduire cette dérivée de la dérivée mx^{m-1} de x^m, il suffit d'en prendre l'inverse, ce qui nous donne $\frac{1}{mx^{m-1}}$, puis de remplacer dans l'expression ainsi obtenue, x par la fonction inverse de x^m, c'est-à-dire par $\sqrt[m]{x}$, ce qui nous donne bien $\frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}}$.

26. — Théorème II, dit des fonctions de fonctions. — Définissons d'abord ce qu'on entend par une *fonction de fonctions.*

Soit :

$$y = f(u)$$

une fonction y d'une variable u. Cette variable u, au lieu d'être une variable indépendante, pourra être elle-même une fonction d'une autre variable v :

$$u = \varphi(v)$$

la variable v pourra, elle aussi, être une fonction d'une quatrième variable t :

$$v = \psi(t)$$

et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à une dernière variable

qui ne sera fonction d'aucune autre, ou, en d'autres termes, qui sera indépendante.

Supposons, pour fixer les idées, que la variable t soit fonction de la variable indépendante x.

$$t = \chi(x)$$

la fonction y est ce qu'on appelle une *fonction de fonctions*.

Nous nous proposons de trouver la dérivée de y par rapport à la variable indépendante x, connaissant les dérivées respectives des fonctions successives f, φ, ψ, χ, prises, pour chacune d'elles, par rapport à la variable dont elle dépend immédiatement. Nous connaissons :

$$\text{limite } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)$$

$$\text{limite } \frac{\Delta u}{\Delta v} = \varphi'(v)$$

$$\text{limite } \frac{\Delta v}{\Delta t} = \psi'(t)$$

$$\text{limite } \frac{\Delta t}{\Delta x} = \chi'(x)$$

ce que nous cherchons, c'est la dérivée de y par rapport à x,

$$\text{limite } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Or on a identiquement :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta t} \times \frac{\Delta t}{\Delta x} \qquad (1)$$

car dans le second membre les facteurs Δu, Δv, Δt, qui figurent au numérateur et au dénominateur se détruisent deux à deux.

Quand Δx, Δt, Δv, Δu, Δy, tendent simultanément vers zéro, le premier membre tend vers la dérivée y'_x de y par rapport à x, les facteurs du second membre tendent respectivement vers $f'(u)$, $\varphi'(v)$, $\psi'(t)$, $\chi'(x)$, et l'égalité (1) devient :

$$y'_x = f'u \times \varphi'(v) \times \psi'(t) \times \chi'(x)$$

de cette égalité, on déduit l'énoncé suivant du théorème des fonctions de fonctions :

La dérivée d'une fonction de fonctions par rapport à la variable

indépendante, s'obtient en faisant le produit des dérivées des fonctions successives, prises, pour chaque fonction, par rapport à la variable dont elle dépend immédiatement.

27. — Théorème III, dit des fonctions composées. — On appelle *fonction composée*, une fonction de plusieurs variables qui sont elles-mêmes des fonctions d'une même variable indépendante :

Soit, pour fixer les idées, une fonction y de deux variables u et v.

$$y = f(u, v) \tag{1}$$

u et v étant des fonctions d'une même variable indépendante x :

$$u = \varphi(x) \tag{2}$$
$$v = \psi(x) \tag{3}$$

y est une fonction composée de x; u et v sont *les fonctions composantes.*

Proposons-nous de déterminer la dérivée de y par rapport à x.

Si nous donnons à x un accroissement Δx, u et v prendront des accroissements Δu, Δv, satisfaisant aux équations :

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x) \quad \text{d'où} \quad \Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$$
$$v + \Delta v = \psi(x + \Delta x) \quad \text{d'où} \quad \Delta v = \psi(x + \Delta x) - \psi(x)$$

Si nous donnons à u et à v dans l'équation (1) des accroissements égaux à Δu et Δv, nous aurons, en désignant par Δy l'accroissement de y correspondant à Δu et Δv, c'est-à-dire à l'accroissement Δx de la variable indépendante x :

$$y + \Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v)$$

D'où nous tirons :

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v) \tag{4}$$

Divisons par Δx les deux membres de l'équation (4), nous avons :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta x} \tag{5}$$

Ce que nous cherchons, c'est la dérivée de y par rapport à x, c'est-à-dire la limite vers laquelle tend $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand Δx tend vers zéro.

Ajoutons et retranchons au numérateur du second membre de l'équation (5), la quantité $f(u, v + \Delta v)$; nous ne changeons évidemment pas la valeur de ce numérateur. Nous avons donc :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) + f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta x}$$

ce qui peut s'écrire ainsi :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta x} + \frac{f(u, v + \Delta v - f(u, v)}{\Delta x} \quad (6)$$

Nous pouvons multiplier par Δu le numérateur et le dénominateur du premier terme du second membre de l'équation (6); nous n'en changerons évidemment pas la valeur. De même, nous pouvons multiplier le numérateur et le dénominateur du second terme du second membre de cette même équation par Δv. Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u\,[f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)]}{\Delta u \times \Delta x} + \frac{\Delta v\,[f(u, v + \Delta v) - f(u, v)]}{\Delta v \times \Delta x}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$+ \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad (7)$$

Si dans $f(u, v + \Delta v)$, nous considérons v et Δv comme des quantités constantes, et u comme étant seule variable, l'expression :

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u}$$

a pour limite la dérivée par rapport à u de la fonction $f(u, v + \Delta v)$, dans laquelle v et Δv sont considérées comme constantes, et u comme seule variable. Cela résulte de la définition que nous avons donnée d'une dérivée. Nous pouvons donc poser, en désignant par $f'_u(u, v + \Delta v)$ cette dérivée :

$$\text{limite } \frac{f(u + \Delta u, v + v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} = f'_u(u, v + \Delta v)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u} = f'_u(u, v+\Delta v) + \varepsilon_1 \qquad (8)$$

ε_1 désignant une quantité qui tend vers zéro en même temps que Δu.

D'ailleurs, si Δv tend vers zéro, $v + \Delta v$ tend vers v, et $f'_u(u, v + \Delta v)$ tend vers $f'_u(u, v)$; on peut donc écrire, en désignant par ε_2 une quantité qui tend vers zéro en même temps que Δv :

$$f'_u(u, v+\Delta v) = f'_u(u, v) + \varepsilon_2$$

Et par suite l'équation (8) devient :

$$\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u} = f'_u(u, v) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad (9)$$

D'autre part, on a, en désignant par $\varphi'(x)$ la dérivée par rapport à x de $u = \varphi(x)$:

$$\text{limite } \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x)$$

Et par conséquent en désignant par ε_3 une quantité qui tend vers zéro en même temps que Δx :

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x) + \varepsilon_3 \qquad (10)$$

Le premier terme du second membre de l'équation (7) peut donc s'écrire en tenant compte des équations (9) et (10) :

$$\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} = [f'_u(u, v) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)][\varphi'(x) + \varepsilon_3]$$

On voit d'une manière semblable que l'on a, en désignant par ε_4 une quantité qui tend vers zéro en même temps que Δv :

$$\frac{f(u, v+\Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} = f'_v(u, v) + \varepsilon_4$$

$f'_v(u, v)$ désignant la dérivée de $f(u, v)$, prise en considérant v comme seule variable et u comme constante.

De même ε_5 désignant une quantité qui tend vers zéro en même temps que Δx, on a :

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \psi'_x + \varepsilon_5$$

Et le second terme du second membre de l'équation (7) peut s'écrire :

$$\frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta x} = [f'_v(u, v) + \varepsilon_4][\psi'_x + \varepsilon_5]$$

L'équation (7) peut donc s'écrire :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'_u(u, v) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2][\psi'_x + \varepsilon_3] + [f'_v(u, v) + \varepsilon_4][\psi'_x + \varepsilon_5]$$

Supposons que Δx tende vers zéro. Le premier membre tend vers la dérivée y'_x de la fonction composée y, par rapport à x. Dans le second membre ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5, tendent vers zéro en même temps que Δx; on a donc à la limite :

$$y'_x = f'_u(u, v) \times \varphi'(x) + f'_v(u, v) \times \psi'(x) \qquad (9)$$

De cette égalité, nous déduisons l'énoncé suivant du théorème des fonctions composées :

Pour obtenir la dérivée d'une fonction composée, il faut prendre successivement la dérivée de la fonction composée par rapport à chacune des fonctions composantes, multiplier cette dérivée par la dérivée de la fonction composante correspondante, prise par rapport à la variable indépendante, et faire la somme des produits ainsi obtenus.

28. — Remarque. — Les dérivées $f'_u(u, v)$, $f'_v(u, v)$ d'une fonction de deux variables u, v, prises en considérant successivement chacune d'elles comme variable et l'autre comme constante, s'appellent les *dérivées partielles* de $f(u, v)$. On les désigne également par les notations différentielles $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, mais il faut bien se rappeler que dy n'a pas la même signification dans ces deux expressions ; il désigne pour chacune d'elles la différentielle de $y = f(u, v)$, prise en considérant comme seule variable celle dont la différentielle figure au dénominateur : à savoir u dans $\frac{dy}{du}$, et v dans $\frac{dy}{dv}$.

Si nous désignons de même par $\frac{dy}{dx}$, la dérivée y'_x de y par rapport à x, le dy qui figure au numérateur de cette expression aura une troisième signification ; il désignera la valeur de la différentielle de y, quand on considère à la fois u et v comme variables.

Nous reviendrons d'ailleurs avec plus de précision sur toutes ces considérations quand nous nous occuperons des différentielles des fonctions de plusieurs variables.

L'équation (9) peut donc s'écrire, en adoptant les notations différentielles :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Cette égalité suppose, nous le répétons, que les trois dy qui y figurent ont trois significations différentes. Sans quoi elle donnerait $\frac{dy}{dx} = \frac{2\,dy}{dx}$, ce qui est absurde.

29.— Applications du théorème des fonctions composées.— Dérivée d'une somme. — Supposons que y soit la somme de deux fonctions de x :

$$y = u + v$$

u et v sont des fonctions de x :

$$u = \varphi(x)$$
$$v = \psi(x)$$

Appliquons le théorème précédent; nous avons :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} \qquad (1)$$

$\frac{dy}{du}$ désigne la dérivée de $y = u + v$, quand v est considéré comme constant et u comme seule variable. On a donc :

$$\frac{dy}{du} = \text{limite}\ \frac{\Delta y}{\Delta u},$$

Δy étant défini par l'équation :

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v = y + \Delta u$$

Cette dernière égalité nous donne :

$$\Delta y = \Delta u$$

D'où :

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = 1$$

Et par suite :

$$\frac{dy}{du} = \text{limite}\,\frac{\Delta y}{\Delta u} = 1$$

On aurait de même :

$$\frac{dy}{dv} = 1$$

Donc l'équation (1) devient en y remplaçant $\frac{dy}{du}$ et $\frac{dy}{dv}$ par 1 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

La dérivée d'une somme de plusieurs fonctions est donc égale à la somme des dérivées de ces fonctions.

30. — Corollaire. — La dérivée de $y = a\,u$, en désignant par a un facteur constant et par u une fonction de x, est égale à $a\,\frac{du}{dx}$: en effet $a\,u$ est la somme de a fonctions de x égales à u : la dérivée de cette somme est donc égale à la somme de a dérivées égales à $\frac{du}{dx}$.

31. — Dérivée d'un produit. — Supposons que y soit le produit de deux fonctions de x, u et v.

$$y = u\,v$$
$$u = \varphi\,(x)$$
$$v = \psi\,(x)$$

Appliquons le théorème des fonctions composées; nous avons :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} \qquad (1)$$

La dérivée de $u\,v$ par rapport à u, v étant considéré comme constant, est égale à $v\,\frac{du}{du}$, c'est-à-dire à v. (Voir n° 30.)

$$\frac{dy}{du} = v$$

De même on a :

$$\frac{dy}{dv} = u$$

L'équation (1) nous donne donc :

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

Donc, la dérivée d'un produit est égale à la somme des résultats obtenus en remplaçant successivement dans le produit chaque facteur par sa dérivée.

32. — Dérivée d'une fraction. — Soient u et v deux fonctions de x, nous nous proposons de trouver la dérivée par rapport à x de la fonction y, définie par l'équation :

$$y = \frac{u}{v}$$

Multiplions par v les deux termes de cette équation, nous avons :

$$u = vy$$

Appliquons la règle donnée au numéro 31 ; nous avons :

$$\frac{du}{dx} = y\frac{dv}{dx} + v\frac{dy}{dx}$$

D'où nous tirons :

$$v\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - y\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - y\frac{dv}{dx}}{v}$$

Remplaçons, dans cette dernière égalité, y par sa valeur $\frac{u}{v}$; il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - \frac{u}{v}\frac{dv}{dx}}{v} = \frac{\frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v}}{v} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

On voit que **la dérivée d'une fraction est une fraction, ayant pour dénominateur le carré du dénominateur de la fraction proposée, et pour numérateur, la différence obtenue en multipliant par le dénominateur la dérivée du numérateur, et en retranchant de ce produit le produit du numérateur par la dérivée du dénominateur.**

B. — RECHERCHE DIRECTE DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS SIMPLES

Dérivées des fonctions algébriques simples.

33. — Nous allons maintenant chercher directement les dérivées des fonctions algébriques les plus simples, x^m, $\frac{1}{x^m}$, $\sqrt[m]{x^n}$; nous verrons ensuite comment on peut, de ces dérivées, déduire, à l'aide des théorèmes généraux démontrés ci-dessus, la dérivée d'une fonction algébrique quelconque.

34. — Dérivée de x^m. — Cherchons d'abord la dérivée de x^2. Ecrivons l'identité :

$$x^2 = x \times x$$

Appliquons au produit $x \times x$, la règle donnée au numéro 31 pour trouver la dérivée d'un produit. Nous avons :

$$\frac{dx^2}{dx} = \frac{dx}{dx} \times x + \frac{dx}{dx} \times x = 2\,x\,\frac{dx}{dx}$$

et, comme la dérivée $\frac{dx}{dx}$ de x par rapport à x est évidemment égale à 1, nous avons :

$$\frac{d\,(x^2)}{dx} = 2\,x$$

Cherchons maintenant la dérivée de x^3. Nous avons :

$$x^3 = x^2 \times x$$

Appliquons au produit $x^2 \times x$, la règle donnée au numéro 31 pour trouver la dérivée d'un produit. Nous avons :

$$\frac{dx^3}{dx} = \frac{d\,(x^2)}{dx} \times x + \frac{dx}{dx} \times x^2$$

Mais nous avons d'ailleurs :

$$\frac{d\,(x^2)}{dx} = 2\,x$$

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

Donc nous avons :

$$\frac{dx^3}{dx} = 2\,x^2 + x^2 = 3\,x^2$$

Dans ces deux cas, nous voyons que, pour trouver la dérivée de la puissance considérée de x, nous avons multiplié la puissance de x par l'exposant, et diminué d'une unité la valeur de cet exposant. Nous allons montrer que cette règle est générale ; pour cela nous allons faire voir que si elle est vraie pour x^m, elle l'est également pour x^{m+1}.

Nous supposons donc que la dérivée de x^m s'obtient en multipliant par m cette fonction de x et en diminuant d'une unité l'exposant m. En d'autres termes, nous supposons que l'on a :

$$\frac{d\,(x^m)}{dx} = mx^{m-1}$$

Il s'agit de voir que la même règle nous donnera la dérivée de x^{m+1}, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{d\,(x^{m+1})}{dx} = (m+1)\,x^m$$

En effet, nous avons :

$$x^{m+1} = x^m \times x$$

Appliquons au produit $x^m \times x$, la règle connue de la dérivation d'un produit. Nous avons :

$$\frac{d\,(x^{m+1})}{dx} = \frac{dx^m}{dx} \times x + x^m \times \frac{dx}{dx}$$

Mais par hypothèse :

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1}$$

D'autre part on a évidemment :

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

Donc on a :

$$\frac{dx^{m+1}}{dx} = mx^{m-1} \times x + x^m$$

ou :

$$\frac{dx^{m+1}}{dx} = mx^m + x^m = (m+1)\,x^m$$

On voit donc que si la règle indiquée plus haut est vraie pour x^m, elle est également vraie pour x^{m+1}.

Mais nous avons démontré directement en commençant que la règle était vraie pour x^2 et pour x^3. Etant vraie pour x^3, elle l'est également pour x^4; étant vraie pour x^4, elle l'est pour x^5, et ainsi de suite pour toutes les puissances de x.

35.— Dérivée de $\frac{1}{x^m}$.— Appliquons à $\frac{1}{x^m}$, la règle donnée au n° 32 pour trouver la dérivée d'une fraction. Posons :

$$y = \frac{1}{x^m} = \frac{u}{v}$$

en faisant :

$$u = 1 \quad , \quad v = x^m$$

Nous avons vu au numéro 32, que l'on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad (1)$$

Remplaçons dans l'égalité précédente u, v, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, par leurs valeurs.

Nous avons :

$$u = 1 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 0$$

Car la dérivée d'une quantité constante est nulle. En effet, puisqu'elle est constante, son accroissement est nul quand x prend un accroissement Δx. Le rapport de cet accroissement constamment nul, à Δx, est nul également; la limite de ce rapport, qui est constamment nul, est nulle. Or cette limite est par définition ce qu'on appelle la dérivée.

On a, d'autre part:

$$v = x^m \quad , \quad \frac{dv}{dx} = mx^{m-1}$$

Donc l'équation (1) devient:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^m \times 0 - 1 \times mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}}$$

ou :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-m}{x^{2m-m+1}} = \frac{-m}{x^{m+1}}$$

36. — Exposants négatifs. — On sait que, pour diviser l'une par l'autre deux puissances différentes d'une même lettre x, il faut élever x à une puissance dont l'exposant est égal à l'exposant du dividende, diminué de l'exposant du diviseur :

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

Supposons que n soit plus grand que m :

$$n = m + p$$

Si nous appliquons la règle que nous venons de donner, nous avons ;

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = x^{-p}$$

Le résultat obtenu est une puissance négative de x. Ce résultat pris en lui-même n'a aucune signification. Faire le produit de $-p$, facteurs égaux à x, ne signifie rien. Mais on peut attribuer un sens à l'expression x^{-p} en l'interprétant de la manière suivante:

Cherchons directement le résultat de la division de x^m par x^n. Nous avons :

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{x^m}{x^{m+p}} = \frac{x^m}{x^m \times x^p} = \frac{1}{x^p}.$$

Nous conviendrons dès lors de définir le sens de l'exposant négatif $-p$ par l'égalité :

$$x^{-p} = \frac{1}{x^p} \qquad (1)$$

On voit que, moyennant cette convention, nous pouvons dire que dans tous les cas, que m soit plus grand ou plus petit que n, le quotient de x^m divisé par x^n est égal à x^{m-n}.

Ceci posé, si nous appliquons à une puissance négative de x, la règle de dérivation de x^m donnée au n° 34, nous avons, en supposant m négatif :

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1} \tag{1}$$

posons :

$$m = -m'$$

m étant négatif, m' est positif. Nous avons :

$$x^m = x^{-m'} = \frac{1}{x^{m'}}$$

et en remplaçant m par $-m'$ dans l'équation (1) :

$$\frac{d\,(x^{-m'})}{dx} = -m'x^{-m'-1} = -m'x^{-(m'+1)} = \frac{-m'}{x^{m'+1}}$$

Telle est la valeur de la dérivée x^m ou $\frac{1}{x^{m'}}$, obtenue en appliquant, dans le cas où m est négatif, la règle du n° 34.

D'ailleurs, m' étant positif, la dérivée de $\frac{1}{x^{m'}}$, telle que nous l'avons déterminée directement au n° 35, a pour valeur $\frac{-m'}{x^{m'+1}}$, c'est-à-dire la même valeur que nous trouvons en appliquant à la puissance négative de x, $x^{-m'}$ ou x^m, la règle générale de dérivation de x^m.

Donc, que m soit positif ou négatif, la dérivée de x^m a pour valeur

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1}$$

37. — Dérivée de $\sqrt[m]{x}$. — Nous avons déjà vu au n° 23 que $\sqrt[m]{x}$ est la fonction inverse de x^m. Nous avons même reproduit au n° 25 sur cet exemple, la démonstration du théorème des fonctions inverses, et nous avons trouvé :

$$\frac{d\sqrt[m]{x}}{dx} = \frac{1}{m\left[\sqrt[m]{x}\right]^{m-1}}$$

[1] En particulier, on aura $x^0 = x^{-p-p} = \frac{x^p}{x^p} = 1$, quel que soit x. Donc il résulte de là que $x^0 = 1$

Et comme on sait que la puissance $(m-1)$ d'une racine d'ordre m a la même valeur que la racine de même ordre de la quantité sous radical élevée à la puissance $(m-1)$, on a :

$$\frac{d\sqrt[m]{x}}{dx} = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$$

38. — Exposants fractionnaires. — On sait que, pour élever à une puissance n une puissance m de x, il faut élever x à une puissance ayant pour valeur le produit des deux exposants m et n. En d'autres termes, on a :

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

Appelons p le produit mn; il résulte de là que pour extraire la racine $n^{ème}$ de x, il faut diviser l'exposant de la puissance sous le radical par l'indice du radical :

$$\sqrt[n]{x^p} = x^{\frac{p}{n}}$$

En effet, en élevant à la puissance n les deux membres de cette égalité, on a :

$$x^p = \left(x^{\frac{p}{n}}\right)^n = x^{\frac{pn}{n}} = x^p$$

Cette règle, donnée pour extraire la racine n^e de x^p, n'a évidemment de sens que si p est un multiple de n, ou, ce qui revient au même, si $\frac{p}{n}$ est un nombre entier; sinon, il faudrait élever x à la puissance fractionnaire $\frac{p}{n}$, c'est-à-dire prendre x un nombre fractionnaire de fois comme facteur, ce qui n'a pas de signification propre.

Mais on peut cependant, par une interprétation convenable, donner un sens à l'expression $x^{\frac{p}{n}}$ quand $\frac{p}{n}$ est fractionnaire. Il suffit pour cela de définir la signification de l'exposant fractionnaire par l'égalité :

$$x^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{x^p}$$

$\sqrt[n]{x^p}$ a évidemment un sens bien déterminé, que p soit ou non un multiple de n. C'est cette expression que désignera $x^{\frac{p}{n}}$ quand $\frac{p}{n}$ sera fractionnaire.

Ceci posé, il est facile de voir que la règle de dérivation de x^m est applicable quand m est fractionnaire. Nous avons, dans le cas où m est entier :

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1}$$

Supposons m fractionnaire et égal à $\frac{p}{n}$, p et n étant entiers : voyons ce que nous allons obtenir en appliquant l'équation ci-dessus, et en y remplaçant m par $\frac{p}{n}$:

$$\frac{dx^{\frac{p}{n}}}{dx} = \frac{p}{n} x^{\frac{p}{n}-1} = \frac{p}{n} x^{\frac{p-n}{n}} = \frac{p}{n} \sqrt[n]{x^{p-n}}$$

On a d'ailleurs, d'après la définition de l'exposant négatif :

$$\sqrt[n]{x^{p-n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x^{n-p}}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{x^{n-p}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-p}}}$$

Donc, en appliquant à une valeur fractionnaire de m, $m = \frac{p}{n}$, la règle de dérivation de x^m, on obtient :

$$\frac{dx^{\frac{p}{n}}}{dx} = \frac{p}{n} \times \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-p}}} \tag{1}$$

Cherchons maintenant directement la valeur de cette dérivée, en donnant à l'exposant fractionnaire $\frac{p}{n}$ l'interprétation indiquée ci-dessus ; nous avons :

$$x^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{x^p}$$

Posons :

$$x^p = u \tag{2}$$

Nous avons :

$$x^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{u} \tag{3}$$

Appliquons le théorème des fonctions de fonctions.
Nous avons :

$$\frac{d\left(x^{\frac{p}{n}}\right)}{dx} = \frac{d\left(x^{\frac{p}{n}}\right)}{du} \times \frac{du}{dx} \tag{4}$$

Mais l'équation (3), dérivée par rapport à u, nous donne :

$$\frac{d\left(x^{\frac{p}{n}}\right)}{du} = \frac{d\sqrt[n]{u}}{du}$$

Or nous avons vu au numéro 37 que l'on a :

$$\frac{d\sqrt[n]{u}}{du} = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \tag{5}$$

D'autre part, en dérivant l'équation (2) par rapport à x, et en appliquant à x^p la règle connue de dérivation de x^m, ce que nous avons le droit de faire, p étant entier, nous avons :

$$\frac{du}{dx} = px^{p-1} \tag{6}$$

Remplaçons dans l'équation (4), $\frac{d(x^{\frac{p}{n}})}{du}$ et $\frac{du}{dx}$ par leurs expressions données par les équations (5) et (6) : nous avons :

$$\frac{d\left(x^{\frac{p}{n}}\right)}{dx} = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \times px^{p-1} = \frac{p}{n}\frac{x^{p-1}}{\sqrt[n]{u^{n-1}}} \tag{7}$$

Mais nous avons :

$$u^{n-1} = (x^p)^{n-1} = x^{pn-p} \tag{8}$$

D'ailleurs nous avons :

$$x^{p-1} = \frac{1}{x^{1-p}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^{(1-p)n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-pn}}} \tag{9}$$

Remplaçons, dans l'équation (7) u^{n-1} et x^{p-1} par leurs valeurs données par les égalités (8) et (9) :

$$\frac{d\left(x^{\frac{pn}{n}}\right)}{dx} = \frac{p}{n} \times \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-pn}} \times \sqrt[n]{x^{pn-p}}} = \frac{p}{n} \times \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-pn} \times x^{pn-p}}} = \frac{p}{n} \times \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-p}}} \tag{10}$$

On voit que l'équation (10) nous donne pour valeur de $\frac{d(x^{\frac{p}{n}})}{dx}$

calculée directement, une expression identique à celle que nous avons obtenue (voir l'Equation (1) ci-dessus) en appliquant à la puissance fractionnaire $x^{\frac{p}{n}}$ de x, la règle générale de dérivation de x^m.

Donc cette règle est applicable quand l'exposant m a une valeur fractionnaire. Nous avons vu qu'elle s'applique également quand cet exposant a une valeur négative. On peut donc énoncer le théorème suivant :

La dérivée de x^m a pour expression $m\,x^{m-1}$, quelle que soit la valeur, positive ou négative, entière ou fractionnaire, de l'exposant m.

Dérivées des fonctions transcendantes simples.

39. — Nous ne nous occuperons ici que de deux classes de fonctions transcendantes : les *fonctions trigonométriques* directes et inverses, et les *fonctions logarithmiques* directes et inverses.

Les fonctions trigonométriques directes sont :

Sin x, cos x; tg x, cotg x; sec x, coséc x.

Les fonctions trigonométriques inverses sont *arc sin x, arc cos x, arc tg x, arc cotg x, arc séc x, arc coséc x.*

Ces fonctions sont les fonctions inverses des fonctions trigonométriques directes.

La fonction logarithmique directe est *log x.*

La fonction logarithmique inverse est a^x.

40. — Dérivée de sin x. — Nous allons d'abord démontrer le théorème suivant :

Le rapport de sinus à l'arc correspondant, tend vers l'unité quand l'arc tend vers zéro.

Traçons (fig. 5) un cercle de rayon égal à l'unité.

Soit $AM = \alpha$ un arc, MP son sinus, AT sa tangente, on a :

$$MP < \text{corde } AM < \text{arc } AM \text{ ou } \sin\alpha < \alpha$$

D'autre part on a :

$$\text{arc } AM < AQ + MQ$$

Dans le triangle rectangle MQT, le côté MQ est plus petit que l'hypothénuse QT. Donc on a :

$$AQ + MQ < AQ + QT$$

Et par conséquent nous avons :

$$\text{arc } AM < AT$$

ou

$$\alpha < tg\ \alpha$$

Donc l'arc α est compris entre son sinus et sa tangente et on a :

$$sin\ \alpha < \alpha < tg\ \alpha$$

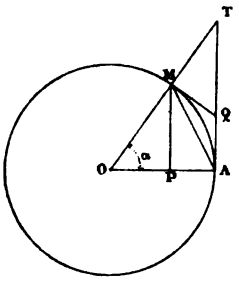

Fig. 5.

Divisons par $sin\ \alpha$ ces trois quantités. Nous avons :

$$1 < \frac{\alpha}{sin\ \alpha} < \frac{tg\ \alpha}{sin\ \alpha}$$

Mais dans les triangles semblables OPM, OAT, on a :

$$\frac{AT}{MP} = \frac{tg\ \alpha}{sin\ \alpha} = \frac{OA}{OP}$$

Supposons maintenant que l'arc α tende vers zéro. Le point M et le point P tendent vers le point A; OP tend vers OA; par conséquent $\frac{OA}{OP}$ tend vers l'unité, et l'on a :

$$\text{limite } \frac{tg\ \alpha}{sin\ \alpha} = 1$$

Donc le rapport $\frac{\alpha}{sin\ \alpha}$, compris entre l'unité et une quantité qui tend vers l'unité, tend lui-même vers 1. Donc on a :

$$\text{limite } \frac{\alpha}{sin\ \alpha} = 1$$

Ce qu'il fallait démontrer :

Ceci posé cherchons la dérivée de $sin\ x$. Posons :

$$y = sin\ x$$

Donnons a x un accroissement Δx ; y prendra un accroissement Δy, satisfaisant à l'équation :

$$y + \Delta y = \sin (x + \Delta x)$$

d'où on tire :

$$\Delta y = \sin (x + \Delta x) - y = \sin (x + \Delta x) - \sin x$$

Et par suite :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

Nous savons d'ailleurs que la différence de deux sinus est égale au double du produit du sinus de la demi-différence des arcs, par le cosinus de leur demi-somme ; on a donc :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Si Δx tend vers zéro, $\frac{\Delta x}{2}$ tend aussi vers zéro et le rapport $\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ tend vers 1, en vertu du théorème démontré plus haut ; $\cos (x + \frac{\Delta x}{2})$ tend d'ailleurs vers $\cos x$, et l'on a :

$$\text{limite } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$$

ou :

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

Donc **la dérivée de sin x est cos x.**

41. — Dérivée de cos x. — Cherchons maintenant la dérivée de :

$$y = \cos x$$

Posons :

$$u = 90^\circ - x \qquad (1)$$

Nous avons :

$$y = \sin u$$

Appliquons le théorème des fonctions de fonctions. Nous avons :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \qquad (2)$$

La dérivée de $\sin u$ par rapport à u, est $\cos u$.

$$\frac{dy}{du} = \cos u = \cos (90^\circ - x) = \sin x$$

D'autre part on a, en dérivant l'équation (1) :

$$\frac{du}{dx} = -1$$

et l'équation (2) devient :

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \times (-1) = \sin x \times (-1) = -\sin x$$

La dérivée de cos x est donc — sin x.

42. — Dérivée de tg x.

Posons :

$$y = tg\ x$$

Nous avons :

$$tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Posons :

$$u = \sin x$$
$$v = \cos x$$

Nous avons :

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$
$$\frac{dv}{dx} = -\sin x$$

$$y = \frac{u}{v}$$

Appliquons la règle donnée au n° 32 pour la dérivation d'une fraction. Nous avons :

$$\frac{dy}{du} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Remplaçons dans l'égalité précédente, u, v, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{du}$, par leurs valeurs en fonction de x. Nous avons :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x - (\sin x \times -\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

La dérivée de tg x est donc : $\frac{1}{\cos^2 x}$.

43. — Dérivée de cotg x. — Soit :

$$y = \text{cotg } x$$

Posons :

$$u = 90^\circ - x \qquad (1)$$

Nous avons :

$$y = tg\ u$$

Appliquons le théorème des fonctions de fonctions. Nous avons :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Nous avons d'ailleurs, en appliquant la règle trouvée au numéro précédent.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 (90^\circ - x)} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{du}{dx} = -1$$

D'où :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

Donc **la dérivée de cotg x est** $\frac{-1}{\sin^2 x}$.

Les dérivées de *sec* x, *coséc* x, se trouveraient très facilement. Mais on les rencontre très rarement dans la pratique. Nous ne nous y arrêterons pas.

Nous allons maintenant passer aux dérivées des fonctions trigonométriques inverses.

44. — Dérivée de arc sin x. — Posons :

$$z = arc \quad sin\ x$$

Nous avons :

$$x = sin\ z$$

Si nous posons :

$$y = sin\ x,$$

nous voyons que z est la fonction inverse de y.

Appliquons le théorème des fonctions inverses (voir n° 24).

Pour obtenir $\frac{dz}{dx}$, nous devons prendre l'inverse de la dérivée de la fonction y, ce qui nous donne (voir n° 40) :

$$\frac{1}{cos\ x},$$

et, dans cette expression, nous devons remplacer x par la fonction z, c'est-à-dire par *arc sin* x, ce qui nous donne :

$$\frac{1}{cos \quad arc \quad sin\ x}$$

Mais l'arc dont le sinus est égal à x, a son cosinus égal à $\sqrt{1 - x^2}$. Ce qui nous donne finalement :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La dérivée de arc sin x est donc égale à $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

45. — Dérivée de arc cos x. — Posons :

$$z = arc \quad cos\ x$$

On verra, comme ci-dessus, que z est la fonction inverse de :

$$y = \cos x$$

Appliquons le théorème des fonctions inverses. Il faut prendre l'inverse de la dérivée de $\cos x$, ce qui nous donne (voir n° 41) :

$$\frac{-1}{\sin x}$$

et remplacer x par z, c'est-à-dire par $\text{arc} \cos x$, ce qui nous donne :

$$\frac{-1}{\sin \text{ arc } \cos x}$$

mais le sinus de l'arc dont le cosinus est égal à x, est égal à $\sqrt{1-x^2}$. Donc la dérivée de z par rapport à x a pour valeur :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Donc la dérivée de arc cos x a pour valeur $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

46. — Dérivée de arc tg x. — Nous allons suivre la même méthode que ci-dessus. Posons :

$$z = \text{arc tg } x$$

z est la fonction inverse de :

$$y = \text{tg } x$$

Appliquons le théorème des fonctions inverses. La dérivée de $\text{tg } x$ est $\frac{1}{\cos^2 x}$, dont l'inverse est :

$$\cos^2 x$$

Il faut remplacer, dans cette dérivée, x par z, c'est-à-dire par $\text{arc tg } x$, ce qui nous donne :

$$\frac{dz}{dx} = \cos^2 \text{ arc tg } x$$

Mais on a, en vertu d'une relation connue entre la tangente et le cosinus d'un arc :

$$\overline{\cos}^2 z = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 z}$$

ou, en remplaçant z par *arc tg* x,

$$\cos^2 \text{arc tg } x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \text{ arc tg } x}$$

La tangente de l'arc dont la tangente est égale à x, c'est x. On a donc :

$$\frac{dz}{dx} = \cos^2 \text{arc tg } x = \frac{1}{1 + x^2}$$

La dérivée de arc tg x a donc pour valeur $\frac{1}{1 + x^2}$.

47. — Dérivée de arc cotg x. — Posons :

$$z = \text{arc cotg } x$$

z est la fonction inverse de :

$$y = \text{cotg } x$$

La dérivée de y est $\frac{-1}{\sin^2 x}$. L'inverse de cette dérivée est :

$$-\sin^2 x$$

Remplaçons x par z dans cette dérivée; nous avons :

$$\frac{dz}{dx} = -\sin^2 z = -\sin^2 \text{arc cotg } x$$

Mais on a, en vertu d'une relation connue :

$$\sin^2 z = \frac{1}{1 + \text{cotg}^2 z}$$

ou, en remplaçant z par *arc cotg* x

$$\sin^2 \text{arc cotg } x = \frac{1}{1 + \text{cotg}^2 \text{ arc cotg } x} = \frac{1}{1 + x^2}$$

On a donc :

$$\frac{dz}{dx} = -\sin^2 z = \frac{-1}{1 + x^2}$$

La dérivée de arc cotg x a donc pour valeur $\frac{-1}{1+x^2}$

48. — Définition du logarithme d'un nombre. — Avant de chercher à déterminer la dérivée de *log x,* nous allons donner du logarithme d'un nombre quelconque x, une définition différente de celle donnée dans les cours de mathématiques élémentaires.

Désignons par a une quantité constante, que nous supposerons supérieure à l'unité, et que nous appellerons *base* du système considéré de logarithmes. Posons :

$$y = a^x \tag{1}$$

Nous allons d'abord étudier la variation de la fonction $y = a^x$, lorsque x prend toutes les valeurs possibles, depuis une valeur négative infiniment grande en valeur absolue, jusqu'à une valeur positive infiniment grande.

Supposons d'abord $x = -\infty$ [1].

La valeur correspondante de y est :

$$y = a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}}$$

et comme a^{∞} est évidemment infiniment grand, a^x est très petit et tend vers zéro quand x tend vers l'infini. Donc pour $x = -\infty$, $y = 0$. x augmente en conservant des valeurs négatives; posons $x = -x'$; x étant négatif, x' est positif; x augmentant, x' diminue. D'ailleurs

$$y = a^x = a^{-x'} = \frac{1}{a^{x'}}$$

x' diminuant et étant positif, $a^{x'}$ diminue et $\frac{1}{a^{x'}}$ augmente. Donc x croissant en conservant des valeurs négatives, y augmente.

Pour $x = 0$ on a $a^x = a^0 = 1$

x augmentant toujours, devient positif; a^x augmente en même temps que x, et devient plus grand que 1. Pour $x = +\infty$, on a $y = a^{\infty} = +\infty$.

Donc en résumé, x variant de $-\infty$ à $+\infty$, y, varie de 0 à ∞,

[1] Le signe ∞ s'énonce *l'infini.* Il désigne la limite vers laquelle tend une quantité qui peut devenir plus grande que toute quantité donnée, aussi grande que l'on voudra.

en prenant successivement toutes les valeurs positives; quand x est nul, y est égal à l'unité.

Ceci posé, soit y un nombre positif quelconque; puisque, lorsque x varie de $-\infty$ a $+\infty$, a^x prend successivement toutes les valeurs positives, pour une valeur de x, convenablement choisie a^x prendra en particulier la valeur y et l'on pourra poser, en donnant à x cette valeur :

$$a^x = y \tag{3}$$

cette valeur de x est ce qu'on appelle *le logarithme de y dans le système de base a;* on a :

$$x = \log y \tag{4}$$

Nous allons voir que cette définition du logarithme d'un nombre correspond bien à la définition donnée en mathématiques élémentaires. Cette dernière est la suivante :

On considère deux progressions, indéfinies dans les deux sens, l'une géométrique, ayant pour raison a, et ayant un terme égal à 1 :

$$--- \frac{1}{a^n} --- \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3 --- a^n ---- \tag{5}$$

l'autre arithmétique, ayant pour raison l'unité, et ayant un terme égal à 0, correspondant au terme égal à 1 dans la progression géométrique:

$$--- n, --- -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, -- n ---- \tag{6}$$

on appelle les termes de la progression arithmétique, les logarithmes des termes de même rang dans la progression géométrique.

Soit :

$$y = a^n \tag{7}$$

un terme quelconque de la première progression (5); on aura en vertu de cette définition

$$n = \log y \tag{8}$$

On voit que, si on fait $n = x$, les équations 3 et 4 d'une part, 7 et 8 d'autre part donnent des valeurs identiques pour le logarithme d'un même nombre y.

Mais la définition élémentaire n'est applicable qu'au cas ou x a des valeurs entières ; en d'autres termes, les nombres dont on a défini ainsi les logarithmes, sont seulement les termes de la progression géométrique (5).

Quant aux nombres qui ne sont pas des termes de cette progression, voici comment on définit leurs logarithmes, en algèbre élémentaire.

Soit y un nombre qui n'est pas un des termes de la progression (5); il sera compris entre deux de ses termes, a^n et a^{n+1} par exemple. Entre ces deux termes, insérons $(p - 1)$ moyens géométriques. Nous aurons une nouvelle progression, dont la raison sera la racine d'ordre p de la raison a de la première progression.

$$a^n, a^n \times \sqrt[p]{a}, a^n \times \left(\sqrt[p]{a}\right)^2 \text{---}, a^n \left(\sqrt[p]{a}\right)^r \text{----} a^n \left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-1}, a^n \left(\sqrt[p]{a}\right)^p = a^{n+1}$$

$$\text{ou } a^n, a^n \times \sqrt[p]{a}, a^n \times \sqrt[p]{a^2} \text{----}, a^n \sqrt[p]{a^r} \text{----} a^n \sqrt[p]{a^{p-1}}, a^n \sqrt[p]{a^p} = a^{n+1} \quad (9)$$

Insérons le même nombre de moyens entre les deux termes de la progression arithmétique correspondant à a^n et a^{n+1} ; ces deux termes sont n et $n + 1$. Nous aurons ainsi une nouvelle progression de raison $\frac{1}{p}$:

$$n, n + \frac{1}{p}, n + \frac{2}{p} \text{-----} n + \frac{r}{p} \text{---} n + \frac{p-1}{p}, n + \frac{p}{p} \text{ ou } n + 1 \quad (10)$$

Les termes de la progression arithmétique (10) sont dits encore les logarithmes des termes de même rang de la progression géométrique (9).

Soit par exemple un nombre :

$$y = a^n \sqrt[p]{a^r} \quad (11)$$

Son logarithme se trouvera ainsi défini par l'égalité

$$\log y = n + \frac{r}{r} \quad (12)$$

La première définition donnée pour le logarithme d'un nombre conduit encore au même résultat que la définition donnée en mathématiques élémentaires. Il suffit pour le constater de poser :

$$y = a^x$$

et de donner, dans cette égalité, à x la valeur :

$$x = n + \frac{r}{p}$$

Nous avons ainsi :

$$y = a^{n+\frac{r}{p}} = a^n \times a^{\frac{r}{p}} = a^n \sqrt[p]{a^r} \tag{13}$$

et l'égalité (4) ci-dessus, devient :

$$log\ y = n + \frac{r}{p} \tag{14}$$

Les équations (13) et (14) sont identiques aux équations (11) et (12). Les deux définitions donnent donc bien, dans ce cas encore, le même résultat.

Si le nombre y dont nous voulons chercher le logarithme n'était pas égal à l'un des termes de la progression (9), on pourrait, en donnant au nombre des moyens insérés $(p - 1)$, une valeur suffisamment élevée, faire en sorte que la différence entre deux termes consécutifs de la progression (9) devienne plus petite que toute quantité donnée. Le nombre y, étant toujours compris entre deux termes de cette progression, différera de l'un deux d'une quantité qui pourra devenir plus petite que toute quantité donnée. En d'autres termes, y sera la limite vers laquelle tendra un des termes de la progression (9), quand p augmentera indéfiniment. On appellera alors logarithme de y, la limite vers laquelle tendra le terme correspondant de la progression (10).

La définition donnée par nous en commençant donnant toujours un résultat identique à la définition élémentaire, quel que soit le nombre des moyens, est donc, en dernière analyse, applicable au logarithme d'un nombre quelconque.

Donc, en résumé, de l'égalité :

$$y = a^x$$

on déduit en prenant a pour base d'un système de logarithmes :

$$x = log\ y$$

Des deux égalités précédentes, on tire :

$$y = a^{log\ y} \tag{15}$$

Cette égalité est une identité, car elle est vraie pour toute valeur de y.

Dans le système à base décimale, habituellement employé, on donne à a la valeur :

$$a = 10$$

49. — Logarithmes népériens. — On est conduit en mathématiques à considérer fréquemment les logarithmes des nombres dans un système ayant pour base le nombre e défini comme il suit :

$$e = \text{limite de } \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{1.2.m}\right)$$

lorsque m augmente indéfiniment.

On démontre, par un raisonnement qui ne présente aucune difficulté, mais que nous ne reproduirons pas ici, pour éviter des longueurs sans intérêt pour la suite de notre sujet, que le nombre e est la limite vers laquelle tend la quantité :

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

lorsque m augmente indéfiniment ; ou encore la quantité :

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

quand α tend vers zéro.

Les logarithmes dans le système de base e, s'appellent logarithmes *népériens*, et se désignent par la notation l, au lieu de la notation *log*, réservée aux logarithmes ordinaires.

Donc si on a :

$$y = e^x$$

on aura :

$$x = l\, y$$

Nous avons dit que, quand α tendait vers zéro, on avait :

$$\text{limite } (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \qquad (1)$$

Prenons, dans un système de base a, les logarithmes des deux membres de cette égalité ; nous avons :

$$log \text{ limite } (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = log\, e$$

ou, ce qui revient au même :

$$\text{limite } \log (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \log e \tag{2}$$

Cette expression peut s'écrire différemment. En effet on a, en vertu de la définition donnée pour le logarithme d'un nombre quelconque (voir équation 15 du n° 48),

$$e = a^{\log e}$$

ce qui peut s'écrire, en élevant les deux membres à la puissance $\frac{1}{\log e}$:

$$e^{\frac{1}{\log e}} = a^{\frac{\log e}{\log e}} = a$$

Prenons les logarithmes népériens des deux membres de cette dernière égalité, nous avons :

$$l\, e^{\frac{1}{\log e}} = l\, a$$

ou :

$$\frac{1}{\log e}\, l\, e = l\, a$$

Mais le logarithme de e dans le système qui a pour base e, est égal à l'unité ; on a donc :

$$\frac{1}{\log e} \times 1 = \frac{1}{\log e} = l\, a$$

Et par suite :

$$\log e = \frac{1}{la}$$

L'égalité (2) peut donc s'écrire :

$$\text{limite } \log (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{la} \tag{3}$$

50. — Dérivée de log x. — Ceci posé, nous allons pouvoir sans peine déterminer la dérivée de la fonction :

$$y = \log x$$

Donnons à x un accroissement Δx. Nous avons :

$$y + \Delta y = log\ (x + \Delta x)$$

D'où :

$$\Delta y = log\ (x + \Delta x) - y = log.\ (x + \Delta x) - log\ x$$

Et :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{log\ (x + \Delta x) - log\, x}{\Delta x}$$

Mais la différence de deux logarithmes est égale au logarithme du quotient; on a donc :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{log\ \dfrac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{log\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \times \frac{1}{\Delta x} =$$

$$\frac{1}{x} \log.\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \times \frac{x}{\Delta x}$$

Mais le produit de $log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ par $\frac{x}{\Delta x}$ est égal au logarithme de la puissance $\frac{x}{\Delta x}$ de $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ et on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\ log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Posons $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$, l'expression précédente devient :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\ log\ (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

faisons tendre Δx vers zéro; α tend vers zéro, et $log\ (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers $\frac{1}{la}$ en vertu de l'équation (3) du numéro précédent. On a donc :

$$\text{limite}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{xla}$$

Donc **la dérivée de log x est $\frac{1}{x\,l\,a}$.**

51. — Dérivée de lx. — Si on applique en particulier cette règle à la recherche de la dérivée de lx, on a pour valeur de cette dérivée :

$$\frac{1}{x\ l\ e}$$

mais $l\ e = 1$; donc **la dérivée de lx est égale à $\frac{1}{x}$.**

52. — Dérivée de a^x. — Posons :

$$z = a^x$$

on en tire, en prenant a pour base d'un système de logarithmes :

$$x = log\ z$$

si donc nous posons :

$$y = log\ x$$

nous voyons que z est la fonction inverse de y. Appliquons la règle de la dérivation des fonctions inverses. La dérivée de y est :

$$\frac{1}{xla}$$

Prenons l'inverse de cette dérivée, nous avons l'expression :

$$xla$$

dans laquelle nous devons remplacer x par z, c'est-à-dire par a^x, ce qui nous donne pour valeur de la dérivée de a^x

$$a^x\ la$$

Donc **la dérivée de a^x a pour valeur a^x la.**

53. — Dérivée de e^x. — Si nous appliquons cette règle dans le cas particulier où a est égal à e, nous avons pour expression de la dérivée :

$$e^x \times le = e^x$$

Donc **la dérivée de la fonction e^x est égale à cette fonction elle-même.**

C. — DÉRIVÉE D'UNE FONCTION QUELCONQUE

54. — Soit y une fonction quelconque de x. Nous supposerons cette fonction reliée à x par une équation dans laquelle ne figurent que les signes indicatifs des opérations algébriques, addition et soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances,

extraction de racines, et les signes caractéristiques des fonctions transcendantes simples dont il a été question ci-dessus, c'est-à-dire les signes *sin*, *cos*, *tg*, *arc sin*, *arc cos*, *arc tg*, *log*, et la fonction exponentielle. En d'autres termes, étant donné une valeur de la variable indépendante x, pour en déduire la valeur de la fonction y, il faudra effectuer une série d'opérations successives, rentrant toutes dans l'énumération ci-dessus. Dans la première opération, ne figureront que x et des quantités constantes ; dans la seconde opération, pourront entrer : le résultat de la première, x, et des constantes ; dans la troisième : le résultat des deux premières, x, et des constantes, et ainsi de suite jusqu'à la dernière opération, dont le résultat sera la fonction y.

Si par exemple on a :

$$y = a - \sqrt{1 + x^2} + l\,\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$$

Etant donné une valeur de x, pour en déduire la valeur correspondante de y, il faut : 1° élever x au carré et ajouter 1 à ce résultat ; 2° prendre la racine carrée de cette somme ; 3° ajouter 1 au résultat de la deuxième opération et diviser cette somme par x ; 4° prendre le logarithme népérien du résultat de la troisième opération ; 5° ajouter a au résultat de la quatrième opération et en retrancher le résultat de la deuxième opération. Le résultat de cette cinquième opération est y.

Ceci posé, soit $y = f(x)$ une fonction de x : $f(x)$ représente une expression indiquant n opérations successives à effectuer pour déduire la valeur de y de la valeur correspondante de x. La $n^{\text{ème}}$ opération à effectuer, celle dont le résultat nous donne y, porte soit sur deux fonctions de x, u et v, si cette opération est une addition algébrique, une multiplication ou une division, soit sur une seule fonction de x, u, si cette opération est une autre de celles indiquées ci-dessus.

Dans le premier cas, y est relié à u et v par l'une des équations :

$$y = u + v, \quad y = uv, \quad y = \frac{u}{v}; \tag{1}$$

Dans le second cas, y est relié à u par l'une des équations :

$$y = u^m,\ y = \sin u,\ y = \cos u,\ y = tg\ u,\ y = arc\ \sin u,\ y = arc\ \cos u,$$
$$y = arc\ tg\ u,\ y = \log u,\ y = a^x \ (2).$$

Dans le premier cas, y est une fonction composée de u et de v, et l'on a (voir n° 27) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Dans le second cas, y est une fonction de la fonction u, et l'on a (voir n° 26) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Dans l'un et l'autre cas, les équations (1) et (2) montrent que y rentre dans la catégorie des fonctions de u et de v dont nous avons appris à déterminer directement les dérivées, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$. Nous sommes donc ramenés à trouver les dérivées de u et de v par rapport à x, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$.

Mais les fonctions u et v sont des fonctions de x qui ne comportent ensemble que $(n-1)$ opérations à effectuer, puisque la dernière des n opérations indiquées par $y = f(x)$ portait sur ces fonctions u et v, que nous avons déterminées par conséquent au moyen des $(n-1)$ premières opérations. Donc en admettant que l'une de ces deux fonctions, v par exemple, soit aussi simple que possible, la fonction u comportera au maximum $(n-1)$ opérations.

Nous sommes donc ramenés de la détermination de la dérivée d'une fonction algébrique comportant n opérations, à la détermination des dérivées de deux fonctions au plus, dont la plus compliquée ne peut comporter plus de $(n-1)$ opérations.

En raisonnant sur u et sur v comme sur x, nous serons conduits à la recherche de la dérivée de fonctions comportant au maximum $(n-2)$ opérations. En continuant ainsi de proche en proche, nous serons ramenés à trouver la dérivée de fonctions ne comportant plus qu'une seule opération à effectuer sur x et des constantes, et par suite rentrant dans la catégorie des fonctions simples dont nous savons déterminer directement les dérivées.

55. — Exemple. — Pour rendre plus claires les considérations qui précèdent nous allons les appliquer à un exemple. Nous allons chercher la dérivée de la fonction :

$$y = a - \sqrt{1 + x^2} + l\,\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \tag{1}$$

La quantité a, qui figure dans le second membre, désigne une constante.

Nous avons déjà énuméré au numéro précédent les cinq opérations successives qu'il faut effectuer pour déterminer la valeur de y qui correspond à une valeur donnée de x.

La dernière de ces cinq opérations porte sur deux fonctions de x, u et v, ainsi définies :

$$u = \sqrt{1 + x^2} \tag{2}$$

$$v = l\,\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \tag{3}$$

On a pour valeur de y :

$$y = a - u + v \tag{4}$$

y est une fonction composée de u et de v; on a donc (voir n° 27) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} \tag{5}$$

D'ailleurs y, considéré soit comme une fonction de u seulement, soit comme une fonction de v seulement, rentre dans la catégorie des fonctions simples dont nous savons trouver la dérivée.

Nous avons :

$$\frac{dy}{du} = -1 \qquad \frac{dy}{dv} = 1 \tag{6}$$

L'équation (5) peut donc s'écrire :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \tag{7}$$

Nous sommes donc ramenés à trouver les dérivées de deux fonctions de x, u et v, comportant seulement, l'une deux opérations, l'autre quatre opérations.

Commençons par déterminer $\frac{du}{dx}$.

La deuxième opération qui sert à déterminer la fonction u

quand on se donne x, consiste à extraire la racine carrée de la fonction $1 + x^2$. Posons :

$$t = 1 + x^2 \tag{8}$$

nous avons :

$$u = t^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

u est une fonction de la fonction t. Nous avons donc (voir n° 26) :

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} \tag{10}$$

Dailleurs u, considéré comme fonction de t, est une fonction simple dont nous savons trouver la dérivée. Nous avons :

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \tag{11}$$

Reste à trouver $\frac{dt}{dx}$. La fonction t ne comporte qu'une opération qui consiste à élever x au carré et ajouter 1 à x^2, nous avons :

$$t = 1 + x^2 \tag{12}$$

t est une fonction simple de x, dont nous savons trouver la dérivée :

$$\frac{dt}{dx} = 2x \tag{13}$$

Portons dans l'équation (10) les valeurs de $\frac{du}{dt}$, $\frac{dt}{dx}$, données par les équations (11) et (13); nous avons :

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{14}$$

Telle est la dérivée de u par rapport à x.

Passons à la fonction v. Nous avons vu qu'elle comporte quatre opérations, dont la quatrième consiste à prendre le logarithme de $\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$.

Désignons par s cette nouvelle fonction de x :

$$s = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \tag{15}$$

Nous avons :

$$v = ls \tag{16}$$

v est une fonction de la fonction s. On a donc :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dx} \tag{17}$$

D'autre part, la dérivée $\frac{dv}{ds}$ rentre dans celles que nous savons trouver (voir n° 51) :

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{s} \tag{18}$$

La fonction s comporte trois opérations, dont la dernière consiste à ajouter 1 à $\sqrt{1+x^2}$, c'est-à-dire à la fonction u, et à diviser cette somme par x.

Nous avons :

$$s = \frac{1+u}{x} \tag{19}$$

s est une fraction ayant pour numérateur et pour dénominateur des fonctions de x dont on connaît les dérivées ; la dérivée du numérateur $1+u$ est $\frac{du}{dx}$, dont l'équation (14) nous donne la valeur; la dérivée du dénominateur est 1. Nous savons trouver la dérivée d'une fonction de cette nature. Nous avons (voir n° 32) :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x\frac{du}{dx} - 1 \times (1+u)}{x^2} = \frac{x\frac{du}{dx} - (1+u)}{x^2}$$

ou, en remplaçant u et $\frac{du}{dx}$ par leurs valeurs tirées des équations (2) et (14) :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - (1+\sqrt{1+x^2})}{x^2}$$

ou :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x^2 - (1+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2 - \sqrt{1+x^2} - (\sqrt{1+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x^2 - \sqrt{1+x^2} - 1 - x^2}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}} \tag{20}$$

Portons dans l'équation (17) les valeurs de $\frac{dv}{ds}$, $\frac{ds}{dx}$, tirées des équations (18) et (20); il vient :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{s} \times -\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \times -\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\frac{x(1+\sqrt{1+x^2})}{(1+\sqrt{1+x^2})x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}} \qquad (21)$$

Portons enfin dans l'équation (7) les valeurs de $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, tirées des équations (14) et (21), nous aurons :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^2}} = -\frac{(\sqrt{1+x^2})^2}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

Il est aisé de voir que la méthode que nous avons suivie est générale et peut s'appliquer à une fonction quelconque de x.

Dans la pratique, on arrive, avec un peu d'habitude, à écrire presque immédiatement une dérivée de cette nature, sans qu'il soit besoin de recourir aux fonctions intermédiaires u, v, t, s.

56. — Dérivées des fonctions implicites. — Nous venons de voir comment on détermine la dérivée d'une fonction explicite d'une variable indépendante.

Supposons maintenant que y désigne une fonction implicite d'une variable x, et proposons-nous de déterminer sa dérivée; la fonction implicite y est reliée à x par une équation non résolue par rapport à y (voir n° 6). Nous savons qu'une telle équation peut toujours se mettre sous la forme :

$$f(x,y) = 0 \qquad (1)$$

Le premier nombre de l'équation (1) est une fonction composée de x et de la fonction y. Nous savons (voir n° 27) que sa dérivée a pour expression :

$$f'_x(x,y)\frac{dx}{dx} + f'_y(x,y)\frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

Comme le premier membre de l'équation (1) est toujours nul, et par suite constant, sa dérivée est constamment nulle. On a donc

en égalant à zéro l'expression (2) ci-dessus, et en remarquant que $\frac{dx}{dx}$ est égal à l'unité :

$$f'_x(x,y) + f'_y(x,y)\,\frac{dy}{dx} = 0$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} \tag{3}$$

La fonction f étant connue, on déterminera, comme il a été di ci-dessus, les dérivées $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ de cette fonction, prises successivement par rapport à chacune des variables x et y, l'autre étant considérée comme constante. On portera les valeurs de ces dérivées dans l'équation (3), et on aura ainsi la valeur de la dérivée $\frac{dy}{dx}$.

57. — Il résulte de ce qui précède que, pour trouver la dérivée $\frac{dy}{dx}$ d'une fonction $y = f(x)$, rentrant dans la catégorie de celles que nous avons définies au n° 54, nous serons conduits à effectuer une succession d'opérations connues, dont le résultat final sera une certaine fonction connue de x, laquelle sera égale à $\frac{dy}{dx}$.

On voit donc que pour chaque valeur de la variable x, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ ou $f'(x)$ de la fonction $y = f(x)$ aura une valeur déterminée, qui en général sera finie.

Ainsi se trouve établie une proposition que nous avons invoquée au n° 20, pour démontrer que la différentielle dy d'une fonction y pouvait être substituée à l'accroissement infiniment petit Δy de cette même fonction, correspondant à un accroissement infiniment petit dx de la variable indépendante.

Si de plus on se reporte à l'expression de la différentielle dy :

$$dy = f'(x)\,dx$$

$f'(x)$ ayant généralement une valeur finie, on voit qu'à un accroissement infiniment petit dx de la variable indépendante, cor-

respond un accroissement infiniment petit dy de la fonction. Donc, quand on fait varier x d'une manière continue en lui donnant successivement une série d'accroissements infiniment petits, la fonction y prend elle-même une série d'accroissements successifs infiniment petits, et varie par suite d'une manière continue.

On voit donc que les fonctions dont nous nous sommes occupés sont toutes des fonctions continues.

58. — Résumé et conclusion des § I et II. — Ici se termine ce que nous avons à dire sur les dérivées des fonctions d'une variable indépendante. Si nous nous reportons à ce que nous avons dit au début de ce chapitre nous voyons que, sachant trouver la dérivée d'une telle fonction, nous savons déterminer sa différentielle, laquelle ne diffère que d'un infiniment petit d'ordre négligeable de l'accroissement de cette fonction, correspondant à un accroissement infiniment petit connu de la variable indépendante.

Donc nous avons résolu ce premier problème **connaissant l'accroissement infiniment petit d'une variable, déterminer l'accroissement infiniment petit correspondant d'une fonction de cette variable.**

§ III. — DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER

59. — Soit y une fonction de x :

$$y = f(x)$$

La différentielle de y a pour expression (voir n° 20) :

$$dy = f'(x)\,dx$$

Cette différentielle est elle-même une fonction de x.

On peut répéter sur elle tous les raisonnements faits aux numéros 19 et suivants sur la fonction y elle-même. Si nous donnons à x un accroisssement Δx, dy prendra un certain accroissement $\Delta\, dy$, qui satisfera à l'équation :

$$dy + \Delta dy = f'(x + \Delta x)\,dx$$

d'où :

$$\Delta dy = f'(x + \Delta x)\, dx - dy = f'(x + \Delta x)\, dx - f'(x)\, dx$$

ou encore :

$$\Delta dy = [f'(x + \Delta x) - f'(x)]\, dx$$

et en divisant par Δx :

$$\frac{\Delta dy}{\Delta x} = \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}\, dx$$

Si on fait tendre Δx vers zéro, la fraction qui se trouve dans le second membre de cette dernière équation tend vers une limite qui est la dérivée par rapport à x de la fonction $f'(x)$; on la désigne par la notation $f''(x)$ et on l'appelle *la dérivée seconde* de y par rapport à x. On peut dès lors écrire, en désignant par ε une quantité qui tend vers zéro en même temps que Δx :

$$\frac{\Delta dy}{\Delta x} = (f''(x) + \varepsilon)\, dx$$

d'où :

$$\Delta dy = (f''(x) + \varepsilon)\, dx\, \Delta x$$

$$\Delta dy = f''(x)\, dx\, \Delta x + \varepsilon\, dx\, \Delta x \qquad (1)$$

Le premier terme du second membre de l'équation qui précède est ce qu'on nomme la *différentielle seconde* de y par rapport à x. On la désigne par d^2y. Si on remarque d'ailleurs que l'accroissement Δx de la variable indépendante est arbitraire de même que dx, on peut poser $\Delta x = dx$, et on a :

$$d^2y = f''(x)\, dx^2$$

ou encore :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

l'équation (1) peut donc s'écrire :

$$\Delta dy = d^2y + \varepsilon\, dx^2$$

et on voit que l'accroissement Δdy de dy diffère de d^2y d'une quantité $\varepsilon\, dx^2$ qui est infiniment petite du troisième ordre ; d^2y

est d'ailleurs du deuxième ordre seulement. En négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs, on pourra donc écrire :

$$\Delta dy = d^2y$$

La différentielle seconde d'une fonction pourra donc être substituée à l'accroissement infiniment petit de sa différentielle première, dans les cas prévus par le théorème fondamental démontré au numéro 16.

On définit d'une manière semblable les *dérivées troisième, quatrième...*, $n^{\text{ème}}$ d'une fonction de x, ainsi que les *différentielles troisième, quatrième...*, $n^{\text{ème}}$; en désignant par des notations analogues ces diverses quantités, on établirait semblablement les relations :

$$\begin{array}{l} \dfrac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) \\ \dfrac{d^4y}{dx^4} = f^{\text{IV}}(x) \\ \vdots \quad = \quad \vdots \\ \vdots \quad = \quad \vdots \\ \dfrac{d^ny}{dx^n} = f^n(x) \end{array}$$

On démontrerait également que les différentielles de divers ordres peuvent être substituées dans les calculs aux accroissements infiniment petits des différentielles d'ordres immédiatement supérieurs.

§ IV. — DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

60. — Différentielles du premier ordre. — Proposons-nous de résoudre, pour une fonction de plusieurs variables indépendantes, le problème que nous venons de résoudre pour une fonction d'une seule variable.

Soit :

$$y = f(x,z,t,\ldots u) \qquad (1)$$

une fonction de plusieurs variables indépendantes x, z, t,... u. Nous

supposons que ces variables prennent des accroissements infiniment petits respectivement égaux à $\Delta x, \Delta z, \Delta t, \ldots \Delta u$. Nous nous proposons de déterminer l'accroissement correspondant Δy de la fonction y.

Nous aurons :

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x, z + \Delta z, t + \Delta t) \tag{2}$$

Nous limitons à trois le nombre des variables indépendantes, pour simplifier les explications qui vont suivre. On se rendra aisément compte que le raisonnement est général et applicable à une fonction d'un nombre quelconque de variables.

De l'équation (2) ci-dessus, nous déduisons :

$$\Delta y = f(x + \Delta x, z + \Delta z, t + \Delta t) - y = f(x + \Delta x, z + \Delta z, t + \Delta t) - f(x, z, t) \tag{3}$$

Ajoutons et retranchons au second membre de l'équation (3) les quantités $f(x, z + \Delta z, t + \Delta t)$ et $f(x, z, t + \Delta t)$; nous n'en changeons pas la valeur. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta y = \; & f(x + \Delta x, z + \Delta z, t + \Delta t) - f(x, z + \Delta z, t + \Delta t) \\ & + f(x, z + \Delta z, t + \Delta t) - f(x, z, t + \Delta t) \\ & + f(x, z, t + \Delta t) - f(x, z, t) \end{aligned} \tag{4}$$

L'équation (4) est l'expression algébrique de cette vérité évidente : que l'accroissement que prend la fonction y, quand on fait varier simultanément les trois variables x, z, t, en leur donnant les accroissements $\Delta x, \Delta z, \Delta t$, est égal à la somme des accroissements que prend la même fonction, quand on fait varier successivement les trois variables x, z, t.

La première ligne de l'équation (4) représente l'accroissement que prend la fonction $f(x, z + \Delta z, t + \Delta t)$ quand x prend l'accroissement Δx, z et t restant contants La fonction $f(x, z + \Delta z, t + \Delta t)$ est ainsi considérée comme fonction d'une seule variable x. On sait que son accroissement a pour valeur (voir n° 20 équation (2) :

$$\Delta x \, [f'_x(x, z + \Delta z, t + \Delta t) + \varepsilon_1] \tag{5}$$

$f'_x(x, z + \Delta z, t + \Delta t)$ désignant la dérivée de la fonction $f(x, z + \Delta z, t + \Delta t)$ dans laquelle x seulement est considéré comme variable,

toutes les autres quantités étant considérées comme constantes, et ε_1 tendant vers zéro en même temps que Δx.

D'ailleurs $f'_x\ (x, z+\Delta z, t+\Delta t)$ diffère de $f'_x\ (x, z, t)$ d'une quantité ε_2 qui tend vers zéro en même temps que Δz et Δt. L'expression (5) peut donc s'écrire :

$$\Delta x\,[f'_x\,(x,z,t) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2] \tag{6}$$

On verrait, d'une manière toute semblable, que la deuxième ligne du deuxième membre de l'équation (4) a pour valeur :

$$\Delta z\,[f'_z\,(x,z,t + \Delta t) + \varepsilon_3]$$

ε_3 tendant vers zéro en même temps que Δz. Ce qui peut s'écrire :

$$\Delta z\,[f'_z\,(x,z,t) + \varepsilon_3 + \varepsilon_4] \tag{7}$$

ε_4 tendant vers zéro en même que Δt.

Enfin, on établirait de la même manière que la troisième ligne du deuxième membre de l'équation (4) peut s'écrire :

$$\Delta t\,[f'_t\,(x,z,t) + \varepsilon_5] \tag{8}$$

ε_5 tendant vers zéro en même temps que Δt. L'équation (4) peut donc s'écrire :

$$\Delta y = \Delta x\,[f'_x(x,z,t) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2] + \Delta z\,[f'_z(x,z,t) + \varepsilon_3 + \varepsilon_4] + \Delta t\,[f'_t\,(x,z,t) + \varepsilon_5]$$

Effectuons les multiplications indiquées ; nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta y = {} & \Delta x\, f'\,(x,z,t) + \Delta z\, f'_z\,(x,z,t) + \Delta t\, f'_t\,(x,z,t)\\ & + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta x + \varepsilon_3\,\Delta z + \varepsilon_4\,\Delta z + \varepsilon_5\,\Delta t\end{aligned} \tag{9}$$

La quantité formant la première ligne du deuxième membre de l'équation (9) est ce qu'on appelle *la différentielle totale* de la fonction y. On la désigne par la notation dy. D'ailleurs comme les quantités Δx, Δz, Δt sont complètement arbitraires, on les désigne, pour la symétrie des notations, par dx, dz, dt, et on écrit :

$$dy = f'_x\,(x,z,t)\,dx + f'_z\,(x,z,t)\,dz + f'_t\,(x,z,t)\,dt$$

Si nous remplaçons par dy le premier membre de l'équation (9) nous avons :

$$\Delta z = dy + [\varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta x + \varepsilon_3\,\Delta z + \varepsilon_4\,\Delta z + \varepsilon_5\,\Delta t]$$

Δx Δz Δt, tendant vers zéro, la quantité entre crochets est infiniment petite d'ordre supérieur au premier. On voit donc que l'accroissement cherché Δy de la fonction y, ne diffère de la différentielle totale dy de cette même fonction que d'une quantité infiniment petite d'ordre supérieur; par suite dy peut être substitué à Δy dans les cas définis par le théorème général démontré au numéro 16.

Pour trouver dy nous n'avons d'ailleurs qu'à effectuer des dérivations suivant des règles que nous connaissons. Le problème peut donc être considéré comme résolu.

61. — Remarque. — Les dérivées f'_x, f'_z, f'_t de la fonction $f(x, z, t)$ prises successivement par rapport à chacune des variables x, z, t, les deux autres étant considérées comme constantes, sont ce qu'on appelle les *dérivées partielles* de la fonction $f(x, z, t)$. On les désigne fréquemment par les notations $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{dy}{dt}$; *mais il ne faut pas perdre de vue que les trois dy qui figurent dans ces trois expressions, ainsi que le dy, différentielle totale, que nous avons défini tout à l'heure, sont des quantités complètement différentes, bien que désignées par la même notation.* Nous avons vu que la différentielle totale a pour valeur :

$$dy = f'_x(x,z,t)\,dx + f'_z(x,z,t)\,dz + f'_t(x,z,t)\,dt$$

les trois autres quantités que nous désignons également par dy sont ce qu'on appelle les *différentielles partielles* de la fonction y. Elles ont pour valeurs respectives :

$$dy = f'_x(x,z,t)\,dx$$
$$dy = f'_z(x,z,t)\,dz$$
$$dy = f'_t(x,z,t)\,dt$$

On voit que la différentielle totale est égale à la somme des différentielles partielles. Il importe de ne jamais oublier cette différence de signification d'une même notation.

La différentielle totale peut s'écrire :

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx + \frac{dy}{dz}\,dz + \frac{dy}{dt}\,dt$$

62. — Différentielles d'ordres supérieurs des fonctions de plusieurs variables indépendantes.

Etant donné une fonction de plusieurs variables :

$$y = f(x,z,t)$$

et sa différentielle totale dy :

$$dy = \frac{dy}{dx}dx + \frac{dy}{dz}dz + \frac{dy}{dt}dt$$

cette différentielle, étant donné un système de valeurs arbitraires de dx, dz, dt, est une fonction de x, z, t, de même que y. On peut reproduire sur elle des raisonnements identiques à ceux que nous avons faits au numéro 59, et nous serons ainsi conduits à définir les différentielles du deuxième ordre, du troisième ordre, ... du $n^{\text{ème}}$ ordre, de la fonction y.

Nous n'aborderons pas l'étude détaillée de cette question, qui nous entraînerait dans des longueurs inutiles au but que nous nous sommes proposé dans cet ouvrage. Il nous suffira de donner l'expression de la différentielle totale d'ordre n, $d^n y$ de la fonction y. Cette expression est la suivante :

$$d^n y = \left[\frac{dy}{dx}dx + \frac{dy}{dz}dz + \frac{dy}{dt}dt\right]^n$$

La puissance n ne doit être considérée ici que comme un symbole ayant la signification suivante :

Si on effectue réellement l'élévation à la $n^{\text{ème}}$ puissance de la quantité entre parenthèses, qui est un polynôme homogène du premier degré par rapport à dx, dz, dt, on obtiendra un polynôme homogène du n^e degré dont les termes auront la forme suivante, en désignant par A un coefficient constant :

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^p \times \left(\frac{dy}{dz}\right)^q \times \left(\frac{dy}{dt}\right)^r \times dx^p \times dz^q \times dt^r$$

avec la condition :

$$p + q + r = n$$

Un terme de cette forme, dans le développement de la $n^{\text{ème}}$ puis-

sance du polynôme $\frac{dy}{dx}\,dx + \frac{dy}{dz}\,dz + \frac{dy}{dt}\,dt$, devra être remplacé, pour obtenir le développement de $d^n y$, par l'expression ci-après :

$$A\,\frac{d^n y}{dx^p\,dz^q\,dt^r}\,dx^p\,dz^q\,dt^r$$

expression dans laquelle la fraction indique le résultat obtenu en prenant p fois successivement la dérivée de y par rapport à x, puis q fois la dérivée par rapport à z du résultat ainsi obtenu, puis enfin r fois la dérivée par rapport à t du dernier résultat ainsi obtenu.

63. — Exemple : Supposons que nous nous proposions de déterminer la différentielle seconde de la fonction :

$$y = 3z^2 + 4xz + 7x^2$$

Appliquons la règle donnée au numéro précédent; nous avons :

$$d^2y = \left[\frac{dy}{dx}\,dx + \frac{dy}{dz}\,dx\right]^2$$

l'exposant 2 étant pris dans le sens symbolique défini ci-dessus. Si nous développons le carré de l'expression entre parenthèse nous avons le résultat suivant :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2 + 2\,\frac{dy}{dx}\,\frac{dy}{dz}\,dx\,dz + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 dz^2$$

En interprétant, comme il a été dit ci-dessus, cette expression nous avons :

$$d^2y = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2y}{dx\,dz}\,dx\,dz + \frac{d^2y}{dz^2}\,dz^2$$

Pour obtenir $\frac{d^2y}{dx^2}$ il faut dériver deux fois successivement y par rapport à x, en considérant z comme constant. Nous avons ainsi :

$$\frac{dy}{dx} = 4z + 14x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 14$$

Pour obtenir $\frac{dy}{dx\,dz}$ il faut : 1° dériver y par rapport à x ; 2° dériver cette première dérivée par rappport à z. On a ainsi :

$$\frac{dy}{dx} = 4z + 14x$$
$$\frac{d^2y}{dx\,dz} = 4$$

Pour obtenir $\frac{d^2y}{dz^2}$ il faut dériver deux fois successivement y par rapport à z :

$$\frac{dy}{dz} = 6z + 4x$$
$$\frac{d^2y}{d^2z} = 6$$

On a donc :

$$d^2y = 14dx^2 + 2 \times 4dx\,dz + 6dz^2 = 14dx^2 + 8dx\,dz + 6dz^2$$

CHAPITRE III

APPLICATIONS DIRECTES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

§ I. — Application du calcul différentiel à l'étude de la variation des fonctions. Maxima et Minima. Exemple.

§ II. — Applications géométriques du calcul différentiel. Recherche des tangentes. aux courbes planes. Équation de la ligne droite. Équation de la tangente à une courbe donnée en un point donné. Rayon de courbure en un point donné d'une courbe plane. Équation du plan. Équation du plan tangent à une surface.

64. — On se rappelle que nous avons été conduits en commençant à rechercher la solution du problème suivant: *étant donné les relations qui lient les accroissements infiniment petits simultanés d'une fonction et des variables dont elle dépend, trouver les relations qui lient entre elles cette fonction et ces variables.*

Nous avons dit que, pour trouver la solution de ce problème général, il nous fallait d'abord résoudre le problème inverse: *connaissant les relations qui unissent plusieurs variables, déterminer les relations qui unissent les accroissements infiniment petits simultanés de ces variables.*

Ce dernier problème constitue le *calcul différentiel;* nous en avons trouvé la solution dans le chapitre II.

Avant de poursuivre l'étude générale que nous avons commencée, et de revenir de la solution du second problème à la solution du premier, nous allons exposer, dans le présent chapitre, plusieurs applications directes du calcul différentiel. Cette digression n'est pas inutile, en raison de l'intérêt capital que présentent, dans une foule de questions, les considérations que nous allons développer.

§ I. — APPLICATION DU CALCUL DIFFÉRENTIEL A L'ÉTUDE DE LA VARIATION DES FONCTIONS

65. — Relation entre la variation d'une fonction et le signe de sa dérivée. — Soit une fonction y d'une variable indépendante x :

$$y = f(x)$$

Faisons varier la variable indépendante x d'une manière continue depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; nous nous proposons de voir comment variera la fonction y.

Supposons, pour fixer les idées, que x ait une certaine valeur x_1 ; soit y_1 la valeur correspondante de y. Faisons croître la variable indépendante d'une quantité infiniment petite dx_1, elle prendra la valeur $x_1 + dx_1$; dx_1 est positif.

De deux choses l'une : ou y augmentera ou y diminuera.

Si la fonction y augmente, elle prendra une valeur $y_1 + dy_1$, dy_1 étant positif.

Si la fonction y diminue, elle prendra une valeur $y_1 + dy_1$, dy_1 étant négatif.

Dans le premier cas le rapport $\frac{y_1 d}{dx_1}$ est positif.

Dans le second cas il est négatif.

Donc, quand x croîtra, y croîtra également, lorsque la dérivée $\frac{dy_1}{dx_1}$ sera positive, et décroîtra quand cette dérivée sera négative.

On voit donc que le signe de la dérivée permet de reconnaître si la fonction y augmente en même temps que la variable indépendante, ou si elle diminue quand cette variable augmente.

66. — Maxima et minima. — Quand une variable cesse de croître pour commencer à décroître, elle passe à un certain moment par une valeur qui est plus grande que celles qui la précèdent et que celles qui la suivent immédiatement. On dit que cette valeur est un *maximum*.

Inversement, quand une fonction cesse de décroître pour commencer à croître, elle passe à un certain moment par une valeur plus petite que celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement. On dit que cette valeur est un *minimum*.

Revenons à ce que nous disions au numéro précédent. Si, lorsque x croît d'une manière continue depuis $-\infty$, jusqu'à $+\infty$, y passe par un maximum, y cesse de croître pour commencer à décroître : sa dérivée cesse d'être positive pour devenir négative. La dérivée d'une fonction continue est toujours d'ailleurs une fonction continue. Elle ne peut donc passer d'une valeur positive à une valeur négative sans prendre la valeur intermédiaire qui est zéro.

De même on verrait que, quand y passe par un minimum, sa dérivée passe de valeurs négatives à des valeurs positives, et que par suite elle s'annule.

Donc, pour obtenir les valeurs de la variable indépendante x auxquelles correspondent les maxima et les minima de la fonction y, il faut égaler à zéro la dérivée $\frac{dy}{dx}$ de y par rapport à x, et résoudre l'équation ainsi obtenue. Les racines de cette équation seront les valeurs de x cherchées.

Les maxima se distingueront des minima, en ce que, pour une valeur de x un peu inférieure à celle correspondant à un maximum, la dérivée est positive, et qu'elle devient négative pour une valeur de x un peu supérieure à celle du maximum, au lieu que l'inverse se produit dans le cas d'un minimum.

Nous allons, pour rendre plus claires toutes ces considérations, les appliquer à un exemple :

67. — Exemple.— Soit, dans une circonférence de rayon R, un secteur dont l'angle au centre a une valeur connue 2α ; on peut, dans ce secteur A O B, inscrire une infinité de rectangles tels que C D E F. On demande quel est celui dont la surface est un maximum (fig. 6).

Soit O I la bissectrice de l'angle A O B. La droite O I sera perpendiculaire à deux des côtés de chacun des rectangles inscrits dans le secteur. Menons la droite O F. Désignons par x l'angle F O I. Prenons x pour variable indépendante ; nous allons chercher à exprimer, en fonction de x, la surface du rectangle C D E F.

Désignons par y cette surface; nous avons :

$$y = EF \times CF$$

Dans le triangle O C F, nous avons, en vertu d'un théorème de trigonométrie connu :

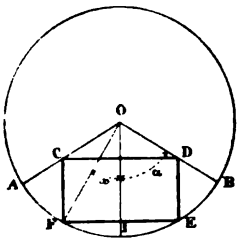

Fig. 6.

$$\frac{CF}{OF} = \frac{\sin COF}{\sin OCF}$$

mais on a :

$$COF = \alpha - x$$

$$OCF = 180^\circ - ACF = 180^\circ - \alpha$$

donc on a :

$$\frac{CF}{OF} = \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin \alpha}$$

et par suite :

$$CF = OF \times \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin \alpha} = R\,\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin \alpha}$$

D'ailleurs dans le triangle O F I nous avons :

$$FI = OF \sin x = R \sin x$$

Et :

$$EF = 2\,FI = 2\,R \sin x$$

Donc y peut s'exprimer ainsi :

$$y = R\,\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin \alpha} \times 2R \sin x = \frac{2R^2}{\sin \alpha} \sin x \sin(\alpha - x)$$

Nous avons ainsi l'équation qui lie la fonction y à la variable indépendante x. Nous voulons maintenant trouver pour quelle valeur de cette variable indépendante x, la fonction y passe par un maximum.

Pour cela nous savons qu'il suffit d'égaler à zéro la dérivée de y par rapport à x.

Cherchons cette dérivée. Nous avons, en remarquant que le

facteur constant $\frac{2R^2}{\sin \alpha}$ se reproduit sans modification par la dérivation, et en appliquant la règle connue de la dérivation d'un produit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2R^2}{\sin \alpha} \times \frac{d\,[\sin x \sin (\alpha - x)]}{dx} =$$

$$\frac{2R^2}{\sin \alpha}\left[\sin x \frac{d \sin (\alpha - x)}{dx} + \frac{d \sin x}{dx} \sin (\alpha - x)\right]$$

mais on a

$$\frac{d\,[\sin (\alpha - x)]}{dx} = \cos (\alpha - x) \times \frac{d\,(\alpha - x)}{dx} = \cos (\alpha - x) \times -1$$
$$= -\cos (\alpha - x)$$

en vertu du théorème des fonctions de fonctions.

On a d'ailleurs :

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

remplaçons ces deux dérivées par leurs valeurs dans l'expression de $\frac{dy}{dx}$; il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2R^2}{\sin \alpha}[-\sin x \cos (\alpha - x) + \cos x \sin (\alpha - x)] = \frac{2R^2}{\sin \alpha}[\sin (\alpha - x - x)]$$
$$= \frac{2R^2}{\sin \alpha} \sin (\alpha - 2x)$$

Pour obtenir la valeur de x correspondant au maximum de y, il faut égaler à zéro cette dérivée, c'est-à-dire poser :

$$\sin (\alpha - 2x) = 0$$

ce qui donne :

$$\alpha - 2x = 0$$
$$x = \frac{\alpha}{2}$$

La valeur correspondante de y est bien un maximum. En effet, supposons que x soit un peu inférieur à $\frac{\alpha}{2}$; $(\alpha - 2x)$ est positif et très petit, $\sin (\alpha - 2x)$ est positif, $\frac{dy}{dx}$ est positif, y croît. Si maintenant nous supposons x un peu supérieur à $\frac{\alpha}{2}$, $(\alpha - 2x)$ est négatif,

il en est de même de $sin\ (\alpha - 2\ x)$ et de $\frac{dy}{dx}$; y décroît. Donc, quand x passe par la valeur $\frac{\alpha}{2}$, y cesse de croître pour commencer à décroître ; y passe donc bien par un maximum.

Ce maximum correspond, on le voit, à une position du point F que l'on obtient en prenant l'intersection de la circonférence O avec la bissectrice de l'angle A O I.

68. — Si nous voulions maintenant étudier la variation de la fonction y, quand x prend toutes les valeurs possibles compatibles avec la question, nous pourrions sans peine y arriver. En effet, pour obtenir tous les rectangles inscrits dans le secteur A O B, il suffit de faire varier x de 0 à α. Le point F se déplace du point I au point A en parcourant l'arc I A.

Pour $x = 0$, les points E et F sont confondus en I, le rectangle se réduit à la droite O I, sa surface est nulle. On le voit d'ailleurs en considérant l'expression de y, dans laquelle le facteur $sin\ x$ est nul quand x est nul.

x augmentant d'une manière continue de 0 à $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{dy}{dx}$ varie de $\frac{2\ R^2\ sin\ \alpha}{sin\ \alpha}$ à zéro en restant positif. Par conséquent y croît.

Pour $x = \frac{\alpha}{2}$, $\frac{dy}{dx}$ est nul ; y passe par son maximum.

Pour x compris entre $\frac{\alpha}{2}$ et α, $\frac{dy}{dx}$ varie de 0 à $\frac{-2\ R^2\ sin\ \alpha}{sin\ \alpha}$ en restant négatif ; y décroît.

Pour $x = \alpha$ le rectangle se réduit à la droite AB ; sa surface est nulle ; ce que montre d'ailleurs l'expression de y dans laquelle le facteur $sin\ (\alpha - x)$ est nul.

§ II. — APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL

69. — Recherche des tangentes aux courbes planes. — Etant donné une fonction y et la variable indépendante x, dont y est la fonction, nous avons vu au numéro 10 comment l'équation $y = f\ (x)$ ou ce qui revient au même $f\ (x, y) = 0$, qui unit la fonction y et la variable indépendante x, représentait une courbe plane, x et y désignant les coordonnées d'un point M de cette courbe (fig. 7), rap-

portée à deux axes ox, oy tracés dans son plan. Nous avons vu aussi que réciproquement toute courbe tracée dans le plan des axes ox, oy pouvait être représentée par une équation telle que : $f(x, y) = 0$. Nous allons voir, en partant de là, comment la considération des dérivées permet de déterminer les tangentes aux courbes planes.

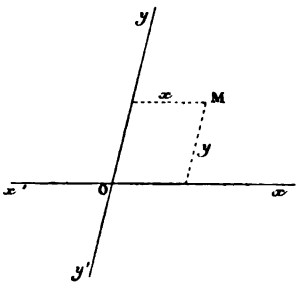

Fig. 7.

Mais auparavant il convient de faire connaître quelques propriétés analytiques de la ligne droite.

70. — Equation de la ligne droite. — Nous allons d'abord établir la proposition suivante : **Toute ligne droite est représentée par une équation du premier degré en x et en y** et réciproquement : **Toute équation du premier degré en x et en y représente une ligne droite.**

Soit AB une ligne droite (fig. 8) ox, oy deux axes de coordonnées, M un point quelconque de la droite AB ; MP $= y$, OP $= x$, les coordonnées du point M.

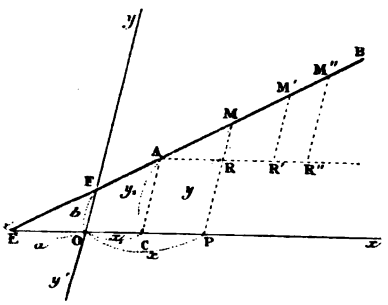

Fig. 8.

Soit A un point fixe choisi arbitrairement sur la droite AB. Soient AC $= y_1$, OC $= x_1$ les coordonnées de ce point. Menons par le point A une parallèle à l'axe ox ; soit R le point où cette droite coupe la droite MP. Prenons sur AB une infinité de points tels que M', M'', . . . ; par chacun de ces points, menons des parallèles M'R', M''R'' . . . à l'axe des y et appelons R', R'' . . . les intersections de ces parallèles avec la droite AR ; tous les triangles tels que AMR, AM'R', AM''R'' . . . sont semblables entre eux et les rapports $\frac{MR}{AR}$, $\frac{M'R}{AR'}$, $\frac{M''R''}{AR''}$ . . . sont égaux entre eux.

Donc, quand le point M se déplace sur la droite AB, le rapport $\frac{MR}{AR}$ reste égal à une quantité constante que nous désignerons par m :

$$\frac{MR}{AR} = m \qquad (1)$$

Mais on a évidemment :

$$MR = MP - RP = MP - AC = y - y_1$$
$$AR = CP = OP - OC = x - x_1$$

et l'équation (1) devient :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \qquad (2)$$

L'équation (2), dans laquelle n'entrent que les coordonnées variables x et y d'un point quelconque de la droite AB et les quantités constantes x_1, y_1, m, est l'équation de la droite AB. Elle peut s'écrire :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - mx = y_1 - mx_1 \qquad (3)$$

On voit que x et y n'y figurent qu'au premier degré; ce qui démontre la première des deux propositions énoncées ci-dessus.

Réciproquement, une équation du premier degré en x et y représente une ligne droite.

Une équation du premier degré en x et y comprend un terme en x, un terme en y et un terme constant. Sa forme la plus générale est donc :

$$Ax + By + C = 0 \qquad (4)$$

Je dis que cette équation représente toujours une ligne droite.

En effet donnons à x dans l'équation (4) une certaine valeur x_1; cette équation va nous donner pour y une valeur correspondante y_1, ayant pour expression :

$$y_1 = -\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B}$$

Soit A le point du plan dont les coordonnées sont x_1 et y_1 (fig. 8).

Donnons maintenant à x une série d'autres valeurs, x, x', x''..., y prendra une série de valeurs correspondantes :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}; \quad y' = -\frac{A}{B}x' - \frac{C}{B}; \quad y'' = -\frac{A}{B}x'' - \frac{C}{B}; \ldots$$

Soient M, M', M'' . . . les points du plan ayant pour coordonnées x et y, x' et y', x'' et y'' ; menons A R parallèle à ox. Les triangles A M R, A M' R', A M'' R'' . . . nous donnent :

$$\frac{MR}{AR} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{\left(-\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}\right) - \left(-\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B}\right)}{x - x_1}$$

$$= \frac{-\frac{A}{B}x + \frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B} + \frac{C}{B}}{x - x_1} = \frac{-\frac{A}{B}(x - x_1)}{x - x_1} = -\frac{A}{B} \qquad (5)$$

$$\frac{M'R'}{AR'} = \frac{y' - y_1}{x' - x_1} = \frac{\left(-\frac{A}{B}x' - \frac{C}{B}\right) - \left(-\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B}\right)}{x' - x_1} = -\frac{A}{B}$$

$$\frac{M''R''}{AR''} = \frac{y'' - y_1}{x'' - x_1} = \frac{\left(-\frac{A}{B}x'' - \frac{C}{B}\right) - \left(-\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B}\right)}{x'' - x_1} = -\frac{A}{B}$$

On voit donc que les rapports $\frac{MR}{AR}, \frac{M'R'}{AR'}, \frac{M''R''}{AR''}$ . . . sont tous égaux. D'ailleurs les angles A R M, A R' M', AR''M'' . . . sont tous égaux, comme supplémentaires de l'angle xoy. Donc les triangles A M R, A M' R', A M'' R'', ont tous un angle égal compris entre des côtés proportionnels : ils sont semblables et par suite les angles R A M, R' A M', R'' A M'' . . . sont tous égaux ; donc enfin les points M, M', M'' . . . dont les coordonnées satisfont à l'équation (4), sont sur une même ligne droite, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque I. — Si la droite A B passe par l'origine des coordonnées, son équation devra être satisfaite si on y fait à la fois $x = 0$, $y = 0$. Le terme constant, $y_1 - mx_1$, de son équation (3) doit donc être nul, et cette équation devient :

$$y - mx = 0$$

II. — L'équation de la droite A B prend une forme remarquable quand on y introduit les coordonnées a, b des points E et F où elle rencontre les axes ox, oy (fig. 8).

Le point E est le point de la droite dont l'ordonnée est nulle. Son abscisse a s'obtiendra en faisant $x = a$, $y = 0$, dans l'équation (3) de la droite A B :

$$a = -\frac{y_1 - mx_1}{m}$$

Le point F a son abscisse nulle et son ordonnée égale à b. Nous aurons donc b en remplaçant dans l'équation (3) x par 0, y par b :

$$b = y_1 - mx_1$$

D'ailleurs l'équation (3) peut s'écrire, en divisant les deux membres par $y_1 - mx_1$:

$$\frac{y}{y_1 - mx_1} - \frac{mx}{y_1 - mx_1} = 1$$

Ou encore :

$$\frac{y}{y_1 - mx_1} + \frac{x}{-\frac{y_1 - mx_1}{m}} = 1$$

Et en remplaçant $-\frac{y_1 - mx_1}{m}$ par a, $y_1 - mx_1$ par b:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

71. — Équation de la droite qui passe par deux points. — Soient deux points A et B, dont nous connaissons les coordonnées : x_1, y_1, pour le point A ; x_2, y_2, pour le point B (fig. 9). Nous nous proposons de déterminer l'équation de la droite qui passe par ces deux points.

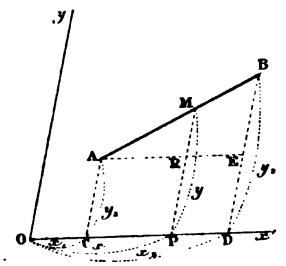

Fig. 9.

Soit M un point quelconque de la droite, x et y ses coordonnées; soit M P l'ordonnée de M ; menons par le point A une parallèle à l'axe ox ; soient R et E les points où cette droite rencontre les droites MP, BD.

Les triangles AMR, ABE sont semblables. On a donc :

$$\frac{MR}{AR} = \frac{BE}{AE} \tag{1}$$

Mais on a :

$$MR = MP - RP = MP - AC = y - y_1 ; AR = CP = OP - OC = x - x_1$$

$$BE = BD - ED = BD - AC = y_2 - y_1 ; AE = CD = OD - OC = x_2 - x_1$$

et l'équation (1) devient :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Cette équation est la relation qui existe entre les coordonnées, x et y d'un point quelconque de la droite A B et les quantités constantes x_1, y_1, x_2, y_2 ; c'est donc l'équation de la droite A B.

72. — Coefficient angulaire d'une ligne droite. — Soit :

$$Ax + By + C = 0$$

l'équation d'une ligne droite A B (fig. 10). Cette équation peut être résolue par rapport à y et mise sous la forme :

$$y = mx + n$$

en posant :

$$m = -\frac{A}{B} \qquad n = -\frac{C}{B}$$

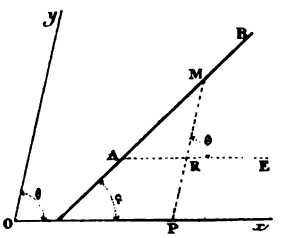

Fig. 10.

Cherchons ce que représente sur la figure le coefficient m. Soit M un point de A B dont les coordonnées sont x et y. Menons l'ordonnée MP, qui rencontre en R la parallèle AE à l'axe des x menée par le point A. Nous avons vu (équation 5 du n° 70) que l'on a :

$$\frac{MR}{AR} = -\frac{A}{B} = m$$

Désignons par θ l'angle que font entre eux les axes des coordonnées, et par α l'angle de la droite A B avec l'axe ox. Nous avons :

$$MRE = \theta \qquad MAR = \alpha$$

Ecrivons que dans le triangle AMR les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés; nous avons :

$$\frac{MR}{AR} = \frac{\sin MAR}{\sin AMR} = \frac{\sin MAR}{\sin[180^\circ - (ARM + MAR)]} = \frac{\sin MAR}{\sin(180^\circ - ARM - MAR)} \quad (1)$$

Mais on a :

$$180^\circ - ARM = MRE = \theta$$

L'égalité (1) peut donc s'écrire :

$$\frac{MR}{AR} = m = \frac{\sin MAR}{\sin(\theta - MAR)} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)} \qquad (2)$$

L'égalité (2) nous fait connaître la signification du coefficient m.

Si on se donne l'angle α, l'angle θ que font entre eux les axes, étant supposé connu, on voit que la valeur de m est déterminée. Ce coefficient a donc la même valeur pour toutes les droites qui font avec ox un angle égal à α, c'est-à-dire pour toutes les droites parallèles à AB.

Réciproquement, si on se donne m et θ, l'équation (2) fait connaître la valeur de l'angle α. En effet chassons les dénominateurs dans cette équation nous avons :

$$\sin \alpha = m \sin(\theta - \alpha) = m(\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha)$$

d'où :

$$\sin \alpha (1 + m \cos \theta) = m \sin \theta \cos \alpha$$

Et en divisant les deux membres de cette égalité par $\cos \alpha$ $(1 + m \cos \theta)$

$$tg\, \alpha = \frac{m \sin \theta}{1 + m \cos \theta} \qquad (3)$$

On voit que toutes les droites pour lesquelles le coefficient m a la même valeur, font avec ox un même angle α, et par suite sont parallèles.

Le coefficient m détermine donc l'angle que fait la droite AB avec l'axe ox. On l'appelle pour cette raison le *coefficient angulaire* de la droite AB.

Remarque I. — Quand les axes des coordonnées sont rectangulaires, l'angle θ est égal à 90°. Son cosinus est nul, son sinus est égal à l'unité, et l'équation (3) devient :

$$m = tg\, \alpha$$

Donc quand les axes des coordonnées sont rectangulaires. le coef-

ficient angulaire d'une ligne droite a pour valeur la tangente trigonométrique de l'angle que fait cette droite avec l'axe ox.

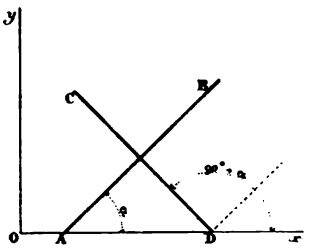

Fig. 11.

II. — Lorsque deux droites A B, C D (fig. 11), sont perpendiculaires l'une sur l'autre, si A B fait avec ox un angle α, l'angle que fait CD avec ce même axe, aura pour valeur $90° + \alpha$. Si on désigne par m et m' les coefficients angulaires de A B et de C D, on aura, en supposant toujours les axes rectangulaires :

$$m' = tg\,(90° + \alpha) = -\,cotg.\,\alpha = -\frac{1}{tg\,\alpha}$$

Et par conséquent :

$$m' = -\frac{1}{m}$$

ou :

$$mm' = -1$$

On voit donc que **quand deux droites sont rectangulaires le produit de leurs coefficients angulaires est égal à — 1.**

73. — Tangente en un point donné d'une courbe. — Soit A B un arc de courbe, M M' une sécante coupant la courbe A B en deux points voisins M et M' (fig. 12). Supposons que la droite M M' tourne autour du point M, de manière que le point M' se rapproche de plus en plus du point M. Il arrivera un moment où, à la limite, le point M' arrivera à se confondre avec le point M. La droite M M' occupera alors une certaine position M T. La droite M T est ce qu'on appelle la *tangente* en M à la courbe A B.

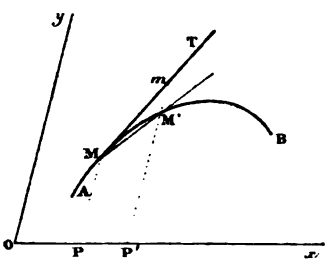

Fig. 12.

On voit donc que la tangente à une courbe est *la limite d'une sécante dont deux points d'intersection avec la courbe tendent à se confondre en un seul.*

Cherchons l'équation de la tangente en un point donné à une courbe plane dont l'équation est connue. Soit :

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe AB. Soient x_1, y_1, les coordonnées du point M. Les valeurs de ces coordonnées satisfont à l'équation de la courbe. On a donc :

$$f(x_1, y_1) = 0$$

Soient M' un point de la courbe infiniment voisin de M, $x_1 + dx_1$, $y_1 + \Delta y_1$ ses coordonnées ; $x_1 + dx_1$, $y_1 + \Delta y_1$ satisfont à l'équation (1) puisque le point M' est sur la courbe. On a donc :

$$f(x_1 + dx_1, y_1 + \Delta y_1) = 0$$

Ceci posé, menons la droite MM'. Cette droite a pour équation (voir n° 71) :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 + \Delta y_1 - y_1}{x_1 + dx_1 - x_1} = \frac{\Delta y_1}{dx_1} \qquad (2)$$

Supposons que M' tende vers M ; la droite MM' tend vers la tangente MT à la courbe AB au point M ; $\frac{\Delta y_1}{dx_1}$ tend vers la dérivée $\frac{dy_1}{dx_1}$ de y_1 par rapport à x_1. L'équation (2) devient à la limite :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{dy_1}{dx_1} \qquad (3)$$

Cette équation représente la sécante MM' lorsque le point M' se confond à la limite avec le point M. C'est donc l'équation de la tangente en M à la courbe AB.

Nous obtiendrons la dérivée $\frac{dy_1}{dx_1}$ en remarquant que y est une fonction implicite de x. Nous aurons ainsi (voir n° 56) :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{f'_{x_1}}{f'_{y_1}} \qquad (4)$$

Portons dans l'équation (3) cette valeur de $\frac{dy_1}{dx_1}$ nous avons :

$$(x - x_1) f'_{x_1} + (y - y_1) f'_{y_1} = 0 \qquad (5)$$

Telle est l'équation de la tangente.

Dans le cas où l'équation de la courbe est donnée sous la forme :

$$y = f(x)$$

on a :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f'(x_1)$$

Et l'équation de la tangente devient :

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

On voit que **le coefficient angulaire de la tangente est égal à la dérivée de y par rapport à x tirée de l'équation de la courbe.**

Remarque. — Si dans l'équation (5) de la tangente nous faisons $x = x_1 + dx_1$, $y = y_1 + dy_1$, cette équation devient :

$$dx_1 f'_{x_1} + dy_1 f'_{y_1} = 0$$

Elle est satisfaite, en vertu de l'équation (4). Donc le point du plan dont les coordonnées ont pour valeur $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, se trouve sur la tangente, puisque ses coordonnées satisfont à l'équation de cette tangente. Ce point est le point m (fig. 12), intersection de la tangente MT avec l'ordonnée M'P' du point M' de la courbe dont l'abscisse est égale $x_1 + dx_1$. La distance M'm est égale à la différence $\Delta y_1 - dy_1$ entre l'ordonnée $y_1 + \Delta y_1$ du point M' et l'ordonnée $y_1 + dy_1$ du point m. Nous avons vu au n° 20 que l'accroissement Δy_1 de y_1, correspondant à l'accroissement dx_1 de x_1, est égal à la différentielle dy_1, à un infiniment petit près d'ordre supérieur au premier. Donc M'm est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier ; donc on peut énoncer la proposition suivante :

La distance d'un point M' d'une courbe à la tangente MT à cette courbe en un point M infiniment voisin de M' est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier.

Cette distance est comptée parallèlement à l'axe oy, dont la position, relativement à la courbe, est évidemment quelconque. La proposition ci-dessus est donc vraie, quelle que soit la direction suivant laquelle est mesurée cette distance, pourvu évidemment que cette direction fasse un angle fini avec la tangente MT.

74. — Rayon de courbure d'une courbe plane. — Soit MM′ un arc de courbe plane ou gauche ; MT, M′T′ des tangentes en deux points infiniment voisins M et M′. Désignons par δs l'arc infiniment petit MM′ et par $d\alpha$ l'angle des deux tangentes MT, M′T′ (fig. 13). On appelle *courbure* de la courbe en M, la limite du rapport de l'angle $d\alpha$ à l'arc δs, quand M′ tend vers M, et *rayon de courbure* de la courbe en M, l'inverse de la courbure, c'est-à-dire la limite $\frac{ds}{d\alpha}$ du rapport de l'arc δs à l'angle $d\alpha$, quand M′ tend vers M.

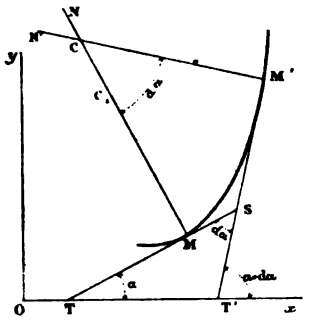

Fig. 13.

Cherchons l'expression de ce rayon de courbure, dans le cas où la courbe est plane. Soient ox, oy, deux axes de coordonnées rectangulaires dans le plan de la courbe ; α l'angle de MT avec ox, $\alpha + d\alpha$ l'angle de M′T′ avec le même axe. L'angle des deux tangentes MT, M′T′ est égal à $d\alpha$. Nous supposons connue l'équation de la courbe :

$$f(x, y) = 0$$

Désignons par ρ le rayon de courbure $\frac{ds}{d\alpha}$; nous avons, en vertu du théorème des fonctions de fonctions :

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dx} \times \frac{dx}{d\alpha} \qquad (1)$$

Nous allons déterminer $\frac{ds}{dx}$, $\frac{dx}{d\alpha}$, en fonction des coordonnées x, y, et de leurs différentielles dx, dy.

Déterminons d'abord $\frac{dx}{d\alpha}$; nous connaissons la relation qui unit l'angle α aux coordonnées x et y du point M. Nous savons (voir n° 73) que le coefficient angulaire de la tangente MT est égal à $\frac{dy}{dx}$. D'autre part, nous savons également (voir n° 72, remarque I) que, les axes étant rectangulaires, ce coefficient angulaire est égal à $tg\ \alpha$. Nous avons donc :

$$tg\ \alpha = \frac{dy}{dx}$$

Si nous dérivons par rapport à α les deux membres de cette équation, nous avons :

$$\frac{d\,tg\,\alpha}{d\alpha} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \times \frac{dx}{d\alpha} = \frac{d^2y}{dx^2} \times \frac{dx}{d\alpha}$$

Remplaçons $\frac{d\,tg\,\alpha}{d\alpha}$ par sa valeur $\frac{1}{cos^2\,\alpha}$ (v. n° 42); il vient :

$$\frac{1}{cos^2\,\alpha} = \frac{d^2y}{dx^2} \times \frac{dx}{d\alpha}$$

Remplaçons $\frac{1}{cos^2\,\alpha}$ par sa valeur $1 + tg^2\,\alpha$, et résolvons cette équation par rapport à $\frac{dx}{d\alpha}$; nous avons :

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{1 + tg^2\,\alpha}{\frac{d^2\,y}{dx^2}} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (2)$$

Telle est la valeur de $\frac{dx}{d\alpha}$.

Evaluons maintenant $\frac{ds}{dx}$. Nous allons démontrer que l'arc infiniment petit $MM' = \delta s$ est égal à sa corde, à un infiniment petit du second ordre près.

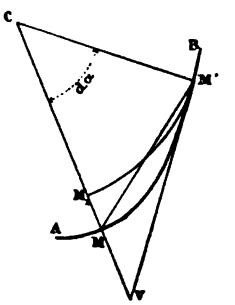

Fig. 14.

En effet, menons la normale MC au point M (fig. 14); elle rencontre en V la tangente M'T'; l'arc δs est évidemment compris entre sa corde et le contour MVM'. Nous savons d'ailleurs que MV (voir n° 73, remarque) est infiniment petit du second ordre. Or le triangle MVM' nous donne :

$$M'V - MM' < MV$$

et en ajoutant MV aux deux membres de cette inégalité :

$$MV + M'V - MM' < 2MV$$

La différence entre MM' et le contour MVM' est donc inférieure à 2MV, c'est-à-dire à un infiniment petit du second ordre. Donc l'arc δs qui est compris entre sa corde et une longueur qui en

diffère d'un infiniment petit du second ordre, est égal à sa corde MM', à un infiniment petit du second ordre près, et il en est de même de la différentielle ds, qui est égale à δs à un infiniment petit du second ordre près (voir n° 20). On peut donc écrire :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{MM'}{dx}$$

Pour évaluer MM', menons par M et M' des parallèles MM'', M'M'' aux axes de coordonnées (fig. 15). Nous avons dans le triangle rectangle MM'' M' :

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MM''}^2 + \overline{M'M''}^2 = dx^2 + dy^2$$

On a donc :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{MM'}{dx} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Remplaçons dans l'expression (1) de ρ, $\frac{dx}{d\alpha}$, $\frac{ds}{dx}$, par leurs expressions (2) et (3); nous avons :

$$\rho = \frac{ds}{dx} \times \frac{dx}{d\alpha} = \frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \times \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

Nous obtiendrons la valeur de ρ en portant dans cette équation (2) les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ tirées de l'équation de la courbe, $f(x, y) = 0$.

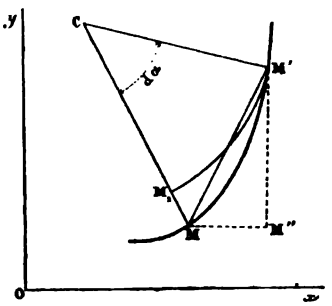

Fig. 15.

Remarque. — Si par M' nous menons M'N', normale à la courbe, cette droite coupe en C la normale M N en M (fig. 13). Quand M' tend vers M, C tend vers une position limite C_1 ; MC_1 est égal au rayon de courbure ρ.

En effet, de C comme centre avec CM' comme rayon, traçons un arc de cercle $M'M_1$ qui coupe en M_1 la normale M C (fig. 14) ; l'arc de courbe δs est égal, nous l'avons vu plus haut, à sa corde MM' et par suite à M'V, à un infiniment petit près du second ordre. Pour une

raison semblable, l'arc de cercle $M'M_1$ est aussi égal à $M'V$, à un infiniment petit près du second ordre. Les deux arcs $M'M_1$, δs égaux tous deux à $M'V$, sont égaux entre eux, à un infiniment petit du second ordre près. D'ailleurs l'angle MCM' des deux normales est égal à l'angle $d\alpha$ des tangentes MT, $M'T'$. Par suite, le rayon CM' de l'arc de cercle $M'M_1$, égal au rapport de cet arc à l'angle au centre MCM_1, est égal à $\frac{\delta s}{d\alpha}$; sa limite $M'C_1$ est donc égale à $\frac{ds}{d\alpha}$, c'est-à-dire à ρ.

Le point C_1 s'appelle le *centre de courbure* de la courbe au point M.

75. — Équation du plan. — Nous avons vu au n° 10 comment, étant donnés trois axes de coordonnées dans l'espace, ox, oy, oz, une équation de la forme :

$$f(x, y, z) = 0$$

représentait une surface, et comment, réciproquement, toute surface pouvait être représentée par une équation de cette forme.

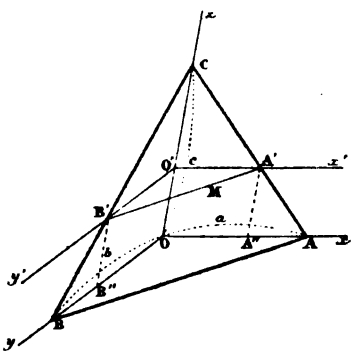

Fig. 16.

Nous allons montrer **qu'un plan est représenté par une équation du premier degré entre les variables x, y, z, et réciproquement qu'une équation du premier degré entre x, y, z, représente un plan.**

Considérons un plan coupant en A, B, C, les trois axes des coordonnées (fig. 16). Désignons par a la longueur oA, par b la longueur oB, par c la longueur oC. Cherchons d'abord l'équation de la droite AC, rapportée aux axes ox, oz dans le plan zox : Cette droite passe par les points A et C ayant respectivement pour coordonnées $x_1 = a$, $z_1 = 0$; $x_2 = 0$, $z_2 = c$. Elle a pour équation (voir n° 70, remarque II) :

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (1)$$

On verrait semblablement que la droite BC, rapportée aux axes oy, oz dans le plan y o z, a pour équation :

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (2)$$

Ceci posé, soit M un point du plan ; menons par M un plan x′o′ y′ parallèle à x o y : il coupe AC en A′, BC en B′ et le plan donné suivant A′B′. Désignons par z_1 la longueur oo′ ; cherchons l'équation de la droite A′B rapportée aux axes o′x′, o′ y′. On verra comme ci-dessus que l'équation de cette droite est la suivante :

$$\frac{x'}{o'A'} + \frac{y'}{o'B'} = 1 \qquad (3)$$

Mais o′A′, c'est, dans le plan z o x, l'abscisse x du point A′ de la droite AC ayant $z = z_1$ pour ordonnée ; l'équation (1) nous donne :

$$o'A' = a\left(1 - \frac{z_1}{c}\right)$$

De même o′B′ est, dans le plan y o z, l'abscisse y du point de la droite BC ayant pour ordonnée $z = z_1$; l'équation (2) nous donne :

$$o'B' = b\left(1 - \frac{z_1}{c}\right)$$

L'équation (3) de la droite A′B′, dans le plan x′ o′ y′, peut donc s'écrire :

$$\frac{x'}{a\left(1 - \frac{z_1}{c}\right)} + \frac{y'}{b\left(1 - \frac{z_1}{c}\right)} = 1$$

En multipliant les deux membres par $\left(1 - \frac{z_1}{c}\right)$, et en faisant passer $\frac{z_1}{c}$ dans le premier membre, il vient :

$$\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} + \frac{z_1}{c} = 1$$

Mais on voit clairement que les coordonnées x, y, z, du point M dans le système ox, oy, oz, sont respectivement égales à x', y', et z_1 ; on peut donc écrire :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (1)$$

Cette équation (4) est la relation qui unit les coordonnées d'un point quelconque du plan. C'est donc l'équation du plan. On voit qu'elle est du premier degré.

Si le plan donné passe par l'origine, le raisonnement précédent cesse d'être applicable. Dans ce cas (fig. 17), les traces oE, oF, de ce plan sur les plans zox, y o z, ont pour équations respectives : $x = kz$, $y = k'z$ (voir n° 70, remarque I). Les coordonnées des points A′ et B′ dans le plan x′oy′, sont : pour A′ : $y' = 0$, $x' = o'A' = k\,z_4$; pour B′ : $x' = 0$, $y' = o'B' = k'\,z_4$ et la droite A′ B′ a pour équation :

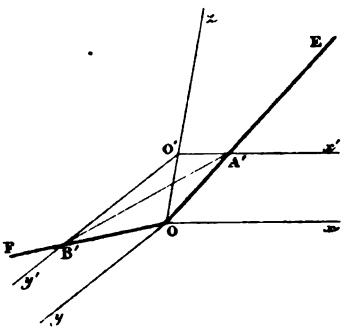

Fig. 17.

$$\frac{x'}{k\,z_4} + \frac{y'}{k'\,z_4} = 1$$

ou encore

$$\frac{x'}{k} + \frac{y'}{k'} - z_4 = 0$$

Et on verra, comme ci-dessus, que le plan donné a pour équation :

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{k'} - z = 0 \qquad (5)$$

Donc, dans tous les cas, un plan est représenté par une équation du premier degré en x, y, z.

Réciproquement, soit :

$$A\,x + B\,y + Cz + D = 0 \qquad (6)$$

une équation du premier degré en x, y, z. Je dis qu'elle représente un plan.

Nous distinguerons deux cas suivant que D est différent de zéro, ou nul.

Premier cas, D n'est pas nul. Posons : $-\frac{D}{A} = a$, $-\frac{D}{B} = b$ $-\frac{D}{C} = c$. Portons suivant oA, oB, oC, sur les trois axes ox, oy, oz,

des longueurs respectivement égales à a, b, c, en tenant compte des signes de ces quantités. Le plan A B C aura pour équation, en vertu de ce que nous avons démontré plus haut :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Mais si nous divisons par $-D$ le premier membre de l'équation (6) ; elle devient :

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} - 1 = 0$$

ou

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

On voit que cette équation est identique à celle du plan A B C. L'équation (6) représente donc bien un plan.

Deuxième cas : D est nul. L'équation (6) se réduit à

$$Ax + By + Cz = 0 \qquad (7)$$

Posons $-\frac{C}{A} = k$, $-\frac{C}{B} = k'$. Soient o E, o F, les droites ayant pour équation $x = kz$, $y = k'z$. Le plan passant par o E, o F aura pour équation, en vertu de ce que nous avons démontré plus haut :

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{k'} - z = 0$$

Divisons par $-C$ le premier membre de l'équation (7) ; elle devient :

$$-\frac{x}{\frac{C}{A}} + -\frac{y}{\frac{C}{B}} - z = 0$$

ou

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{k'} - z = 0$$

L'équation (7) représente donc le plan E o F.

76. — Plan tangent en un point donné d'une surface. — Soit M (fig. 18) un point d'une surface, M' un point voisin; la sécante MM', lorsque M' tend vers M, tend vers une certaine position limite MT, qu'on appelle *tangente au point M à la surface.*

Il existe une infinité de tangentes en un point M à une surface. Nous allons démontrer que toutes sont dans un même plan.

Rapportons la surface à trois axes de coordonnées ox, oy, oz, soit :

$$z = f(x, y)$$

son équation. Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées du point M ; $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + \Delta z_1$, les coordonnées du point M', infiniment voisin de M. Quand nous donnons aux variables x_1 et y_1 les accroissements dx_1, dy_1, nous savons (voir n° 60) que l'accroissement Δz_1 de z_1 est égal, à un infiniment petit d'ordre supérieur près, à la différentielle totale dz_1 de z_1, définie par l'équation :

$$dz_1 = \frac{dz}{dx_1} dx_1 + \frac{dz}{dy_1} dy_1 \qquad (1)$$

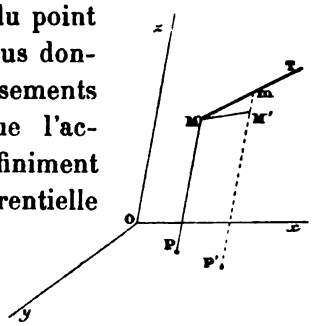

Fig. 18.

Si nous considérons l'équation :

$$z - z_1 = \frac{dz}{dx_1}(x - x_1) + \frac{dz}{dy_1}(y - y_1) \qquad (2)$$

Cette équation, étant du premier degré en x, y, z, représente un plan. Si nous y donnons à x, y, z, les valeurs $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$, nous voyons que cette équation (2) devient identique à l'équation (1). L'équation (2) est donc satisfaite par les valeurs $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$, données aux coordonnées x, y, z. En d'autres termes, le point M', dont les coordonnées ont, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, les valeurs $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$, se trouve à la limite dans le plan (2). Le point M s'y trouve d'ailleurs également, car ses coordonnées x_1, y_1, z_1, mises à la place de x, y, z, annulent les deux membres de l'équation (2). Donc la droite MM' se trouve à la limite dans le plan (2). Comme

la droite MM′ est une tangente quelconque à la surface au point M, toutes les tangentes telles que MM′ sont dans le plan (2). Ce plan est appelé *plan tangent* en M à la surface donnée.

Pour le déterminer géométriquement, il suffit de connaître deux tangentes en M à la surface. Le plan passant par ces deux tangentes est le plan tangent.

Remarque. — Si on mène par M′ l'ordonnée M′P′ qui rencontre en m le plan tangent, on voit que mP′ est égal à $z_1 + dz_1$, M′P′ à $z_1 + \Delta z$, et M′m à $\Delta z_1 - dz_1$, c'est-à-dire (voir n° 60), à une quantité infiniment petite d'ordre supérieur au premier; on voit donc que **la distance M′m du point M′ infiniment voisin de M, au plan tangent en M, est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier.**

LIVRE II

CALCUL INTÉGRAL

CHAPITRE IV

DES INTÉGRALES

ÉTANT DONNÉES LES RELATIONS QUI LIENT LES ACCROISSEMENTS INFINIMENT PETITS SIMULTANÉS DE DIVERSES VARIABLES, EN DÉDUIRE LES RELATIONS QUI LIENT CES VARIABLES

§ I. — Solution du problème général dans le cas le plus simple. — Intégrales définies. — Intégrales indéfinies.

§ II. — Recherche des intégrales. — Intégration directe. — Intégration par décomposition, par substitution, par parties.

§ III. — Intégrales multiples.

§ IV. — Équations différentielles.

§ I. — INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES

77. — Nous avons vu au chapitre I comment l'étude des mathématiques appliquées nous conduisait à rechercher la solution du problème général énoncé en tête du présent chapitre.

Nous avons dit que, avant d'aborder le problème ainsi défini et pour nous permettre d'en trouver la solution, nous allions d'abord résoudre le problème inverse, savoir : *connaissant les relations qui lient diverses grandeurs, en déduire les relations qui lient leurs accroissements infiniment petits simultanés.* Le chapitre II a été consacré à la solution de ce problème.

Nous avons fait remarquer, chemin faisant, que ce second problème, qui constitue le calcul différentiel, présentait en dehors de la solution du premier problème un intérêt propre dans l'étude de diverses questions. Le chapitre III a été consacré à l'étude de

quelques-unes des applications les plus importantes du calcul différentiel.

Nous allons revenir maintenant au problème général qui nous occupe, celui que nous avons posé en commençant, et dont l'énoncé figure en tête de ce quatrième chapitre.

Le cas le plus général est celui où on donne une relation quelconque entre diverses grandeurs et leurs différentielles de divers ordres. Il faut alors en déduire la relation qui lie ces grandeurs elles-mêmes.

Le problème ainsi défini n'a pas toujours une solution. Etant donné arbitrairement des relations entre diverses variables et leurs différentielles de divers ordres, il n'existe pas nécessairement une relation entre ces variables elles-mêmes.

Alors même que le problème a une solution, et qu'il existe une relation entre les variables finies, on ne sait pas toujours la trouver.

On ne peut donc l'aborder que dans une série de cas particuliers, où la solution existe et où on sait la trouver.

Nous allons examiner quelques-uns de ces cas.

78. — Solution du problème général dans le cas d'une fonction d'une seule variable. Intégrales définies. Intégrales indéfinies. — Le cas le plus simple est celui où on se propose de déterminer une fonction y d'une seule variable indépendante x, les accroissements infiniment petits dy, dx, de la fonction et de la variable indépendante étant liés par une relation de la forme :

$$dy = f(x)\,dx \qquad (1)$$

On voit que pour chaque valeur de la variable indépendante x, nous connaissons l'accroissement dy de la fonction, correspondant à un accroissement dx donné à la variable indépendante. Ce que nous nous proposons, c'est de déterminer la relation qui lie y à x. En d'autres termes, c'est de trouver la valeur de la fonction y qui correspond à une valeur quelconque de la variable indépendante x.

Supposons, pour fixer les idées, que nous voulions déterminer la valeur Y de y qui correspond à la valeur X donnée à la variable indépendante x.

Faisons varier x depuis une valeur initiale x_0 jusqu'à la valeur X (pour plus de simplicité nous supposerons x_0 plus petit que X).

Nous pouvons supposer que x augmente progressivement de x_0 à X en prenant une série d'accroissements successifs, tous égaux à dx. On aura de la sorte :

$$X = x_0 + dx + dx + dx + \ldots$$

Quels vont être les accroissements correspondants de la variable y? Nous pourrons les déterminer, puisque l'équation (1) nous donne la valeur de chaque accroissement dy, quand on connaît x et dx.

Désignons par y_0 la valeur de y qui correspond à la valeur initiale x_0 de la variable x. Quand x prendra l'accroissement dx, y prendra un accroissement dy, que l'équation (1) nous permet de déterminer. Cet accroissement est égal à $f(x_0)\,dx$, en sorte que pour : $x = x_0 + dx$ nous aurons :

$$y = y_0 + dy = y_0 + f(x_0)\,dx$$

Quand x prendra un nouvel accroissement dx, y prendra un nouvel accroissement dy, dont on obtiendra la valeur en remplaçant dans l'équation (1) x par $x_0 + dx$. La nouvelle valeur de y sera donc :

$$y = y_0 + f(x_0)\,dx + f(x_0 + dx)\,dx$$

Quand x prendra un troisième accroissement dx, y prendra un troisième accroissement dy, dont la valeur s'obtiendra en remplaçant dans l'équation (1) x par $x_0 + dx + dx$, et la nouvelle valeur de y sera :

$$y = y_0 + f(x_0)\,dx + f(x_0 + dx)\,dx + f(x_0 + dx + dx)\,dx$$

En continuant ainsi de proche en proche jusqu'à ce que x ait

atteint la valeur X, nous voyons que la valeur correspondante Y de y sera la suivante :

$$Y = y_0 + f(x_0)\,dx + f(x_0 + dx)\,dx + f(x_0 + dx + dx)\,dx$$
$$+ f(x_0 + dx + dx + dx)\,dx + f(x_0 + dx + dx + dx + dx)\,dx + \ldots \qquad (2)$$

On voit que Y s'obtiendra en ajoutant à la valeur initiale y_0, la somme des valeurs successives que prend l'accroissement dy ou $f(x)\,dx$, quand x prend toutes les valeurs successives comprises entre x_0 et X.

Cette somme est ce qu'on appelle *l'intégrale de $f(x)\,dx$, entre les limites x_0 et X;* on la désigne par la notation :

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

le signe $\int$ est la première lettre du mot somme.

L'expression ci-dessus s'énonce *somme ou intégrale de x_0 à X de $f(x)\,dx$.*

Une intégrale prise ainsi entre les limites déterminées est ce qu'on appelle une *intégrale définie.* Si les limites x_0 et X sont des quantités données, l'intégrale définie a une valeur bien déterminée, puisque c'est une somme de quantités déterminées. On voit que la valeur d'une intégrale définie ne dépend que des valeurs de ses limites; c'est une fonction de ses limites :

L'égalité (2) ci-dessus peut s'écrire :

$$Y = y_0 + \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \qquad (3)$$

Cette égalité répond à la question que nous nous sommes posée puisque, pour une valeur quelconque X donnée à la variable indépendante x, elle nous fait connaître la valeur correspondante Y de la fonction.

Les lettres X et Y n'ont été introduites que pour éviter des confusions dans le raisonnement précédent. Nous pouvons les remplacer par les notations habituelles x et y et écrire :

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \qquad (4)$$

Cette équation (4) est l'équation qui répond à la question. C'est la relation la plus générale qui lie entre elles deux variables y et x dont les accroissements infiniment petits simultanés dy et dx sont reliés par l'équation (1).

On voit qu'elle contient une *constante arbitraire* y_0. Quelle que soit la valeur que nous donnions à cette quantité constante y_0, la fonction de x définie par l'équation (4) sera telle que les accroissements infiniment petits simultanés de y et de x satisferont à l'équation (1). Cela résulte évidemment de la façon dont on a établi cette équation (4). Cela était d'ailleurs évident *a priori*. En effet, la seule chose que nous connaissions, c'est, pour chaque valeur de x, l'accroissement infiniment petit de y correspondant à un accroissement déterminé infiniment petit de x. En faisant la somme de ces accroissements, nous n'obtiendrons jamais que l'accroissement total que prend y quand x passe d'une première valeur à une seconde. Cet accroissement total est le seul élément que les données de la question nous permettent de déterminer. Il est clair que, pour avoir la valeur de y correspondant à la seconde valeur de x, il faudra se donner arbitrairement la valeur initiale y_0 de y à laquelle il faut ajouter cet accroissement pour obtenir la valeur de y correspondant à la seconde valeur de x.

Le second membre de l'équation (4) s'écrit le plus souvent :

$$\int f(x)\,dx$$

et s'appelle une *intégrale indéfinie*. C'est une fonction de x renfermant une constante arbitraire.

§ II. — RECHERCHE DES INTÉGRALES

79. — Intégrales indéfinies. — Considérons la fonction y de x définie par l'équation :

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int f(x)\,dx$$

Il résulte de ce que nous avons dit au numéro précédent que,

lorsque la variable indépendante x prend un accroissement dx, la variable y prend un accroissement dy ayant pour valeur :

$$dy = f(x)\,dx$$

L'accroissement dy est, à un infiniment petit du second ordre près, égal à la différentielle de y (voir n° 20). Nous pouvons supposer par suite que la notation dy représente cette différentielle. L'équation précédente nous donne :

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

on voit donc que la fonction y est une fonction de x dont nous connaissons la dérivée. Le problème de la recherche des intégrales se ramène donc au problème suivant : *Trouver toutes les fonctions ayant leur dérivée égale à $f(x)$.*

La solution de ce problème peut s'énoncer comme il suit :

Si on connaît une fonction quelconque de x, $F(x)$ dont la dérivée soit égale à $f(x)$, on n'aura qu'à ajouter une constante arbitraire C à $F(x)$ pour avoir l'expression générale des fonctions ayant toutes leur dérivée égale à $f(x)$.

En effet, soit $y = \Psi(x)$ une fonction quelconque ayant pour dérivée $f(x)$. Considérons la fonction :

$$\Psi(x) - F(x)$$

sa dérivée sera :

$$\frac{d\Psi}{dx} - \frac{dF}{dx} = 0$$

puisque les fonctions $\Psi(x)$ et $F(x)$ ont toutes deux la même dérivée $f(x)$.

La fonction $\Psi(x) - F(x)$, dont la dérivée est nulle pour toute valeur de x, est constante (voir n° 35).

On a donc :

$$\Psi(x) - F(x) = C$$
$$\Psi(x) = F(x) + C$$

et par suite :

$$y = F(x) + C \quad \text{ou} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{5}$$

C est la constante arbitraire que nous savions devoir trouver dans l'expression de y.

80. — Intégrales définies. — Nous venons de voir comment on détermine la valeur d'une intégrale indéfinie. De là nous déduirons sans peine comment on détermine la valeur d'une intégrale définie :

L'équation (3) du n° 78 :

$$Y = y_0 + \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

nous donne :

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = Y - y_0$$

D'autre part, l'équation (5) du n° 79 nous donne, en y remplaçant successivement x par X et par x_0 :

$$Y = F(X) + C$$
$$y_0 = F(x_0) + C$$

D'où :

$$Y - y_0 = F(X) - F(x_0) = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

On voit que l'intégrale définie est égale à la différence des valeurs de l'intégrale indéfinie correspondant aux deux limites. Sa valeur est bien déterminée, car la constante arbitraire de l'intégrale indéfinie disparaît dans la soustraction.

On voit en résumé que la recherche de l'intégrale de $f(x)\,dx$ se ramène à la recherche de la fonction $F(x)$, c'est-à-dire d'une fonction ayant sa dérivée égale à $f(x)$.

Remarque. — L'égalité :

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - f(x_0)$$

nous donne, en renversant l'ordre des limites X et x_0 :

$$\int_X^{x_0} f(x)\,dx = F(x_0) - F(X) = -\Big[F(X) - f(x_0)\Big] = -\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

Cette dernière égalité nous montre que lorsqu'on intervertit l'ordre des limites d'une intégrale définie, cette intégrale change de signe.

81. — Intégration directe. — Nous avons au chapitre II déterminé les dérivées d'un certain nombre de fonctions. Chaque dérivée va, en vertu de ce que nous venons de dire au numéro précédent, nous donner l'expression d'une intégrale indéfinie.

$dx^{m+1} = (m+1)\,x^m\,dx$	d'où l'on déduit :	$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$d\,\sin x = \cos x\,dx$	—	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$d\,\cos x = -\sin x\,dx$	—	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$d\,tg\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$	—	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$
$d\,cotg\,x = \frac{-dx}{\sin^2 x}$	—	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -cotg\,x + C$
$d\,arc\,\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	—	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,\sin x + C$
$d\,arc\,\cos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$	—	$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,\cos x + C$
$d\,arc\,tg\,x = \frac{dx}{1+x^2}$	—	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x + C$
$d\,arc\,cotg\,x = \frac{-dx}{1+x^2}$	—	$\int \frac{-dx}{1+x^2} = arc\,cotg\,x + C$
$d\,a^x = a^x\,l\,a\,dx$	—	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{l\,a} + C$
$d\,\log x = \frac{\log e}{x}\,dx = \frac{dx}{x\,l\,a}$	—	$\int \frac{dx}{x} = \frac{\log x}{\log e} + C = lx + C$

On ramène à ces quelques intégrales la plupart de celles que l'on rencontre dans la pratique, au moyen de quelques règles dont nous allons exposer les plus importantes.

82. — Intégration par décomposition. — Nous savons que la différentielle d'une somme de fonctions est égale à la somme des différentielles de ces fonctions. Il en résulte que l'intégrale indéfinie d'une somme de fonctions s'obtient en faisant la somme de leurs intégrales. En effet, soient $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ deux fonctions; on a :

$$d[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] = d\,\varphi_1'(x) + d\,\varphi_2(x)$$

soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ les dérivées de $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$; on a :

$$d[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] = f_1(x)\,dx + f_2(x)\,dx = dx\,[f_1(x) + f_2(x)]$$

. La fonction $\varphi_1 + \varphi_2$ a pour dérivée $f_1 + f_2$; donc l'intégrale de $(f_1 + f_2)\,dx$ est $\varphi_1 + \varphi_2 + C$, en vertu de ce que nous avons dit au n° 79.

Donc quand on aura à intégrer une différentielle dont on ne connaît pas l'intégrale, on cherchera à décomposer cette différentielle en une somme de différentielles dont on connaît les intégrales.

Exemple. — Soit à trouver l'intégrale :

$$y = \int \frac{dx\,(1 + x)}{x}$$

nous avons :

$$\int \frac{dx\,(1 + x)}{x} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x\,dx}{x} = \int \frac{dx}{x} + \int dx$$

ou :

$$\int \frac{dx\,(1 + x)}{x} = l\,x + x + C$$

83. — Intégration par substitution. — Soit à trouver l'intégrale :

$$y = \int F(x)\,dx$$

Posons :

$$x = \varphi(u)$$

On a :

$$dx = \varphi'(u)\,du$$

et :

$$y = \int F[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du$$

Il peut se faire que, en choisissant convenablement la variable x, cette seconde expression de y soit plus facile à intégrer que la première.

Exemple. — Soit à trouver l'intégrale :

$$y = \int \frac{dx}{a^2 + x^2} \qquad (1)$$

Posons :

$$\frac{x}{a} = u \quad \text{ou} \quad x = au$$

On a :

$$dx = a\,du$$

Remplaçons dans l'équation (1) x et dx par leur valeur ; on a :

$$y = \int \frac{a\,du}{a^2 + a^2 u^2} = \int \frac{du}{a\,(1 + u^2)} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1 + u^2}$$

Nous savons intégrer cette dernière expression (voir n° 81) :

$$y = \frac{1}{a}\, arc\ tg\ u + C = \frac{1}{a}\, arc\ tg\ \frac{x}{a} + C$$

84. — Intégration par parties. — Soient u et v deux fonctions de x. Nous savons que l'on a :

$$d\,uv = u\,dv + v\,du$$

On en déduit :

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

Ou

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

On voit qu'on peut ainsi substituer à une intégrale de la forme $\int u\,dv$, une intégrale $\int v\,du$, qui peut être plus facile à trouver :

Exemple. — Soit à trouver l'intégrale :

$$y = \int x \cos x\,dx$$

Posons :

$$u = x\ ,\ v = \sin x$$
$$du = dx\ ,\ dv = \cos x\,dx$$

et l'égalité :

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

devient en y remplaçant u, v, du, dv par leurs valeurs :

$$\int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x + C$$

§. III. — INTÉGRALES MULTIPLES

85. — Soit l'intégrale définie :

$$\int_a^b \varphi(x, y)\,dy$$

dans laquelle nous considérons x comme une quantité constante. Cette intégrale définie est une fonction de ses limites a, b. Pour effectuer l'intégration, nous chercherons d'abord l'intégrale générale, qui sera une certaine fonction de y dans laquelle figurera x :

$$\int \varphi(x, y)\,dy = \psi(x, y) + C$$

Et l'intégrale définie aura pour valeur :

$$\int_a^b \varphi(x, y)\,dy = \psi(x, b) - \psi(x, a)$$

Cette intégrale définie est donc une certaine fonction de x. Désignons-la par $f(x)$; nous aurons :

$$f(x) = \psi(x, b) - \psi(x; a) = \int_a^b \varphi(x, y)\,dy$$

La différentielle $f(x)\,dx$ peut à son tour être intégrée entre des limites c et d. Cette nouvelle intégrale aura pour expression :

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d dx \int_a^b \varphi(x, y)\,dy$$

Cette intégrale est ce qu'on appelle une *intégrale double*. Elle n'est fonction que des limites a, b, c, d.

On verrait d'une manière toute semblable qu'on peut considérer une fonction de x, $f(x)$, définie par l'intégrale double :

$$f(x) = \int_c^d dz \int_a^b dy\, \varphi(x, y, z)$$

En intégrant $f(x)\, dx$ entre les limites e et f, on aurait l'intégrale triple :

$$\int_e^f dx \int_c^d dz \int_a^b \varphi(x, y, z)\, dy$$

On définirait semblablement des intégrales quadruples, quintuples, etc.

Les indications qui précèdent montrent comment on les intégrerait. Pour intégrer par exemple : $\int_c^d dx \int_a^b \varphi(x, y)\, dy$, on intégrera d'abord $\int_a^b \varphi(x, y)\, dy$, en considérant x comme constant ; puis on multipliera la fonction de x ainsi trouvée, $f(x)$, par dx, et on cherchera par les procédés ordinaires la valeur de $\int_c^d f(x)\, dx$.

86. — La valeur d'une intégrale multiple est indépendante de l'ordre dans lequel on effectue les intégrations.

Nous allons démontrer cette proposition dans le cas d'une intégrale double.

Dans ce but nous allons d'abord rechercher comment on établit la dérivée d'une fonction $f(x)$, représentée par une intégrale définie de la forme $\int_a^b \varphi(x, y)\, dy$.

Soit donc u une fonction de x, ainsi définie :

$$u = \int_0^a \varphi(x, y)\, dy$$

Supposons que x prenne un accroissement Δx ; u prendra un accroissement Δu, satisfaisant à l'équation ci-après :

$$u + \Delta u = \int_a^b \varphi(x + \Delta x, y)\, dy$$

$$\Delta u = \int_a^b \varphi(x + \Delta x, y)\, dy - u = \int_a^b y(x + \Delta x, y)\, dy - \int_a^b \varphi(x, y)\, dy$$

Si on a bien saisi ce qui a été exposé précédemment, on voit que chacune des deux intégrales définies qui figurent dans le second membre de l'égalité précédente est une somme d'éléments qui sont, pour la première intégrale, les différentes valeurs que prend le produit de dy par $\varphi(x + \Delta x, y)$ quand y prend toutes les valeurs possibles comprises entre les limites a et b, et pour la seconde intégrale les différentes valeurs que prend le produit de dy par $\varphi(x, y)$ quand y prend successivement les mêmes valeurs que dans la première intégrale. Il est bien évident qu'au lieu de retrancher la seconde somme de la première, on obtiendra le même résultat en retranchant deux à deux chacun des éléments des deux sommes et en faisant la somme des résultats ainsi obtenus. En d'autres termes, on a :

$$\int_a^b \varphi(x + \Delta x, y)\, dy - \int_a^b \varphi(x, y)\, dy = \int_a^b [\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)]\, dy$$

D'où :

$$\Delta u = \int_a^b [\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)]\, dy$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \int_a^b \frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x}\, dy$$

Mais quand Δu et Δx tendent vers zéro, la fraction sous le signe $\int$ tend vers la dérivée $\frac{d\varphi(x, y)}{dx}$ de $\varphi(x, y)$, prise par

rapport à x, en considérant y comme constant. Donc enfin, on a :

$$\frac{du}{dx} = \int_a^b \frac{d\,\varphi\,(x, y)}{dx}\,dy$$

On voit que, pour prendre la dérivée d'une fonction de x ainsi définie, il suffit de prendre la dérivée par rapport à x de la fonction placée sous le signe $\int$.

Ceci posé, nous allons démontrer que la valeur d'une intégrale double est indépendante de l'ordre dans lequel on effectue l'intégration :

Soit une intégrale double :

$$\int_c^d dx \int_a^b \varphi\,(x, y)\,dy$$

Cette intégrale, telle qu'elle est écrite, représente les deux opérations suivantes : 1° intégrer $\varphi\,(x, y)\,dy$ entre les limites a et b, x étant considéré comme constant ; 2° multiplier par dx le résultat de cette première intégration et intégrer le produit par rapport à x entre les limites c et d.

Au lieu de procéder ainsi, on aurait pu :

1° intégrer par rapport à x, entre les limites c et d, $\varphi\,(x, y)\,dx$, y étant considéré comme constant ; 2° multiplier cette intégrale, qui est une fonction de y, par dy, et intégrer le produit par rapport à y entre les limites a et b. On aurait ainsi calculé la valeur de l'intégrale double :

$$\int_a^b dy \int_c^d \varphi\,(x, y)\,dx$$

Je dis que ces deux intégrales doubles sont égales et que l'on a :

$$\int_c^d dx \int_a^b \varphi\,(x, y)\,dy = \int_a^b dy \int_c^d \varphi\,(x, y)\,dx$$

Ces deux intégrales doubles sont fonctions de leurs limites seulement. Supposons que l'une des limites de la variable x, d par exemple, soit variable et égale à x, les autres limites a, b, c étant considérées comme des constantes. Les intégrations effectuées par rapport à y dans les deux intégrales doubles, seront faites entre les limites a et b; les intégrations par rapport à x, entre les c et x. Ces deux intégrales doubles seront alors deux fonctions de x. Nous allons démontrer que ces deux fonctions de x ont la même dérivée. Cherchons d'abord la dérivée de l'intégrale :

$$\int_c^x dx \int_a^b \varphi(x, y)\, dy \tag{1}$$

Si nous désignons comme précédemment par $f(x)$ l'intégrale $\int_a^b \varphi(x, y)\, dy$, nous avons :

$$\int_c^x dx \int_a^b \varphi(x, y)\, dy = \int_c^x f(x)\, dx$$

$\int_c^x f(x)\, dx$ est une fonction de x, et, si nous nous reportons à ce que nous avons dit au n° 79, nous voyons que cette fonction de x a pour dérivée $f(x)$, c'est-à-dire :

$$\int_a^b \varphi(x, y)\, dy \tag{2}$$

Telle est la dérivée de l'intégrale définie (1).

Voyons maintenant quelle sera, par rapport à x, la dérivée de :

$$\int_a^b dy \int_c^x \varphi(x, y)\, dx$$

L'intégrale $\int_c^x \varphi(x, y)\, dx$ est une fonction de x, x étant une des

limites de l'intégration; cette fonction de x contiendra d'ailleurs la variable y. Posons donc :

$$\psi(x, y) = \int_c^x \varphi(x, y)\, dx$$

on a :

$$\int_a^b dy \int_c^x \varphi(x, y)\, dx = \int_a^b \psi(x, y)\, dy$$

Pour trouver la dérivée de cette expression, il faut, avons-nous dit plus haut, prendre la dérivée de la fonction placée sous le signe $\int$. Ce qui nous donne :

$$\int_a^b \frac{d\,\psi(x, y)}{dx}\, dy \tag{3}$$

Mais la dérivée par rapport à x de $\psi(x, y)$ c'est-à-dire de $\int_c^x \varphi(x, y)\, dx$, c'est, en vertu du n° 79, $\varphi(x, y)$ et par suite l'expression (3) peut s'écrire :

$$\int_a^b \varphi(x, y)\, dy \tag{4}$$

Les expressions (2) et (4) sont identiques; donc les deux intégrales :

$$\int_c^x dx \int_a^b \varphi(x, y)\, dy$$

et :

$$\int_a^b dy \int_c^x \varphi(x, y)\, dx$$

ont même dérivée. Elles ne peuvent donc différer que d'une quantité constante, mais si on fait $x = c$ toutes deux sont nulles; car

une intégrale dont les deux limites sont confondues est évidemment nulle. Donc enfin les deux intégrales doubles qui ont une différence constante, différence qui pour une certaine valeur de x est nulle, ont une différence nulle ; donc elles sont égales. Etant égales pour toute valeur de x, elles le sont en particulier pour $x = d$ et l'on a :

$$\int_c^d dx \int_a^b \varphi(x, y)\, dy = \int_a^b dy \int_c^d \varphi(x, y)\, dx$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ IV. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

87. — Nous avons vu comment les questions que l'on rencontre dans l'application des sciences mathématiques se ramènent en général à la résolution du problème énoncé en tête du présent chapitre.

Nous venons de résoudre ce problème dans le cas simple où on se propose de déterminer la relation qui unit une fonction y à sa variable x, connaissant entre les deux variables x et y, et leurs accroissements simultanés infiniment petits dx, dy, une relation de la forme $dy = f(x)\, dx$. En d'autres termes, nous avons appris à déterminer une fonction d'une variable indépendante x, connaissant la dérivée $\frac{dy}{dx}$ exprimée explicitement en fonction de x.

Nous avons ensuite résolu ce même problème dans le cas où la fonction $f(x)$ est définie par une intégrale simple, double, ou multiple d'ordre quelconque.

Dans un grand nombre de questions, il pourra se faire que les relations directement établies entre les variables x et y et leurs accroissements simultanés infiniment petits, contiennent non seulement ces accroissements, mais les accroissements de ces accroissements, c'est-à-dire les différentielles ou les dérivées d'ordres supérieurs au premier.

Il arrivera encore fréquemment que dans ces relations établies directement, on sera conduit à introduire plus de deux variables.

Le problème général devrait donc être résolu dans le cas où les variables sont en nombre quelconque et où les relations données contiennent ces variables et leurs différentielles de divers ordres. Des relations de cette nature sont ce qu'on appelle des *équations différentielles.*

Pour les résoudre il faut en déduire les relations les plus générales qui existent entre les variables finies.

Les équations différentielles n'admettent pas toujours de solutions. Alors même qu'elles en admettent on ne sait les trouver que dans certain cas.

L'étude du calcul intégral fait connaître des méthodes plus ou moins générales qui permettent de résoudre certaines classes d'équations différentielles.

Ces méthodes conduisent toujours, en dernière analyse, à déterminer des intégrales.

Pour suivre les calculs que l'on rencontre habituellement dans la pratique des constructions, il n'est pas nécessaire de connaître ces méthodes. Les notions exposées ci-dessus sont suffisantes.

Nous avons cru, en conséquence, devoir laisser de côté des considérations qui n'offriraient qu'un intérêt théorique pour les lecteurs auxquels s'adresse cet ouvrage, et qui sortiraient par suite du programme que nous nous sommes tracé.

CHAPITRE V

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INTÉGRAL

§ I. — Mesure des surfaces. — Détermination analytique des surfaces planes. — Application à la surface du cercle. Mesure des surfaces courbes dans le cas des surfaces de révolution. — Application à la sphère.

§ II. — Mesure des arcs de courbes planes. — Application à la parabole.

§ III. — Mesure des volumes. — Détermination analytique des volumes. — Volumes des solides de révolution. — Application. — Volume de la sphère. — Volume du tore.

§ I. — MESURE DES SURFACES

88. — Aire des courbes planes. — Soit A B (fig. 19) une courbe plane dont l'équation, supposée résolue par rapport à y, est :

$$y = f(x)$$

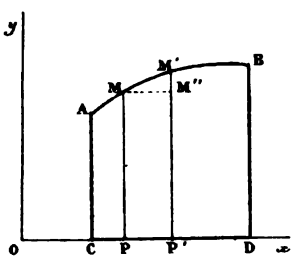

Fig. 19.

Proposons-nous de trouver la surface comprise entre les ordonnées A C, B D, la courbe A B et l'axe o x.

Nous supposerons que les axes des coordonnées sont rectangulaires. Nous désignerons par x_0 et y_0 les coordonnées du point A, par x_1 et y_1 les coordonnées du point B, par A la surface A C M P comprise entre l'ordonnée A C et l'ordonnée d'un point quelconque M de la courbe, compris entre A et B.

Désignons par x et y les coordonnées du point M. Supposons que x prenne un accroissement dx, le point M venant en M', infiniment voisin de M, l'accroissement dA de la surface A, correspon-

dant à l'accroissement dx donné à x, a pour valeur la surface du quadrilatère M M′ P′ P, laquelle se confond, à un infiniment petit du second ordre près, avec la surface du rectangle M M″ P′ P. (Voir n° 17.)

On a donc :

$$d\,A = \mathrm{MP} \times \mathrm{PP'} = y\,dx = f(x)\,dx$$

Et par suite (voir n° 78) :

$$A = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + A_0$$

A_0 est la valeur de A, qui correspond à $x = x_0$. Cette valeur est évidemment nulle. On a donc :

$$A = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \qquad (1)$$

Le problème se ramène à une simple intégration.

Pour ce motif, la recherche d'une intégrale est souvent désignée par l'expression de *quadrature*.

On aurait pu arriver directement à l'expression de A. En effet la surface A C M P (fig. 20) peut être considérée comme partagée, par une série d'ordonnées distantes entre elles de dx, en quadrilatères infiniment petits ayant même surface, à un infiniment petit du second ordre près, que les rectangles ayant pour base dx et pour hauteur les différentes valeurs de y comprise entre A C $= y_0$ et M P $= y$. Chacun de ces rectangles a pour mesure $y\,dx$ ou $f(x)\,dx$, et la surface A, qui est égale à leur somme, aura pour expression, en vertu même de la définition d'une intégrale définie :

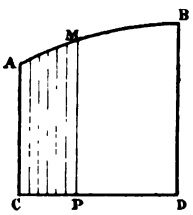

Fig. 20.

$$A = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

Connaissant l'expression de la surface A = ACMP, il nous suffit de donner à x la valeur x_1 pour obtenir la surface ABCD, dont l'expression est par suite $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx$.

89. — Supposons maintenant que la surface que nous nous proposons d'évaluer, au lieu d'être limitée par deux ordonnées A C, B D et l'axe ox, soit comprise à l'intérieur d'une courbe fermée A M B N (fig. 21), dont nous supposons connue l'équation:

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

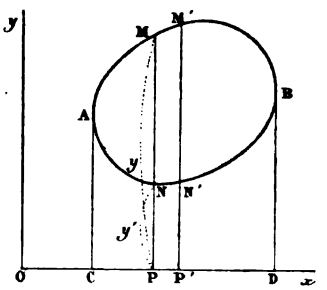

Fig. 21.

Les axes des coordonnées sont toujours supposés rectangulaires.

La courbe donnée est comprise entre deux tangentes extrêmes AC, BD, parallèles à oy; soient x_0, y_0 les coordonnées du point A, x_1, y_1, les coordonnées du point B, x, y les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe. L'ordonnée M P rencontre la courbe fermée A B en un nombre pair de points d'intersection ; nous supposons, pour fixer les idées, que ces points d'intersection sont au nombre de deux. Soit N le second point où la droite M P rencontre la courbe A B, y' l'ordonnée de ce point. Appelons A la surface MAN comprise entre l'ordonnée M N et la branche de courbe M A N.

Si nous supposons que l'ordonnée M N P prend la position infiniment voisine M' N' P', nous aurons :

$$dA = \mathrm{MM'N'N} = \mathrm{MM'P'P} - \mathrm{NN_1P'P}$$

En nous reportant au n° précédent, nous voyons que l'on a :

$$\mathrm{MM'P'P} = y\, dx \qquad \mathrm{NN'P'P} = y'\, dx$$

On a donc

$$dA = (y - y')\, dx$$

y, y', sont les racines de l'équation (1) résolue par rapport à y, après y avoir remplacé x par sa valeur o P ; y et y' sont, on le voit, des fonctions de x ; et il en est de même de leur différence $y - y'$; on a :

$$y - y' = \varphi(x)$$

et par suite

$$dA = \varphi(x)\, dx$$

D'où on déduit :

$$A = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx + Ao$$

A_0 désigne la valeur de A qui correspond à $x = x_0$. Cette valeur est évidemment nulle.
On a donc :

$$A = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx$$

En donnant dans l'expression de A à x la valeur x_1, on aura la valeur de la surface cherchée A M B N.

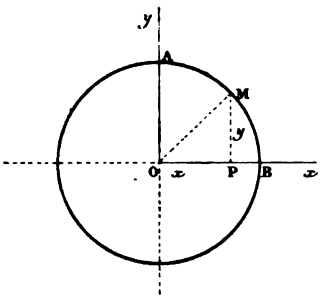

Fig. 22.

90. — Exemple. Surface du cercle. — Soit un cercle ayant O pour centre et O M $= R$ pour rayon. Rapportons-le à deux axes rectangulaires O A, O B, passant par son centre. Soit M un point quel conque du cercle, M P $= y$ son ordonnée ; O P $= x$ son abscisse. Le triangle rectangle O M P nous donne :

$$\overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{OM}^2$$

ou

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Telle est l'équation du cercle. Nous nous proposons de déterminer sa surface. Désignons par A la surface A O M P. L'expres-

sion de A nous est donnée par l'équation (1) du numéro 88 :

$$A = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

Dans laquelle nous devons faire :

$$x_0 = 0$$
$$f(x) = y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

ce qui nous donne pour expression de A :

$$A = \int_0^x dx \sqrt{R^2 - x^2}$$

Cherchons la valeur de l'intégrale indéfinie :

$$\int dx \sqrt{R^2 - x^2}$$

nous pouvons multiplier et diviser par R^2, ce qui nous donne :

$$\int dx \sqrt{R^2 - x^2} = R^2 \int \frac{dx \sqrt{R^2 - x^2}}{R^2} = R^2 \int \frac{dx}{R} \sqrt{\frac{R^2 - x^2}{R^2}}$$
$$= R^2 \int \frac{dx}{R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}$$

nous allons intégrer par substitution en posant :

$$\frac{x}{R} = z$$

d'où on tire, en différenciant :

$$\frac{dx}{R} = dz$$

on a donc :

$$\int \frac{dx}{R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} = \int dz \sqrt{1 - z^2}$$

Nous sommes ramenés à cette dernière intégrale. Nous allons l'intégrer par parties (voir n° 84). Nous savons que l'on a :

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad (2)$$

Nous allons poser

$$v = z \qquad u = \sqrt{1 - z^2} = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$dv = dz \quad du = \frac{1}{2}(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \times d(1 - z^2) = \frac{1}{2}(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \times -2z\,dz$$

$$du = -\frac{z\,dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

L'équation (2) peut donc s'écrire, en remplaçant u, v, du, dv, par leurs expressions :

$$\int dz\sqrt{1 - z^2} = z\sqrt{1 - z^2} - \int z \times \left(-\frac{z\,dz}{\sqrt{1 - z^2}}\right) = z\sqrt{1 - z^2} + \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad (3)$$

Cette dernière intégrale peut s'écrire comme il suit :

$$\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{dz\,(z^2 - 1 + 1)}{\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} - \int \frac{(1 - z^2)\,dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} - \int dz\sqrt{1 - z^2} \quad (4)$$

Remplaçons dans l'équation (3) $\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1 - z^2}}$ par sa valeur tirée de l'équation (4); nous avons :

$$\int dz\sqrt{1 - z^2} = z\sqrt{1 - z^2} + \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} - \int dz\sqrt{1 - z^2}$$

ou, en faisant passer dans le premier membre la seconde intégrale qui figure dans le second membre :

$$2\int dz\sqrt{1 - z^2} = z\sqrt{1 - z^2} + \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

et en divisant par 2 :

$$\int dz\sqrt{1 - z^2} = \frac{1}{2}z\sqrt{1 - z^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

Nous sommes ainsi ramenés à une intégrale connue :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

C'est (voir n° 81) l'intégrale de *arc sin z*. On a donc :

$$\int dz\sqrt{1-z^2} = \frac{1}{2}\,z\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}\,arc\,sin\,z + C$$

Nous avons vu d'ailleurs que la surface cherchée A a pour expression :

$$A = \int_0^x dx\sqrt{R^2-x^2} = R^2\int dz\sqrt{1-z^2}$$

Cette dernière intégrale doit être prise entre les limites de z qui correspondent aux limites 0 et x données à x.

Pour $x=0$, $z=\frac{0}{R}=0$; pour $x=x$, $z=\frac{x}{R}=z$. Les limites sont donc 0 et z, et l'on a :

$$A = R^2\int_0^z dz\sqrt{1-z^2} = R^2\left[\frac{1}{2}\,z\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}\,arc\,sin\,z + C\right]^{z=z}$$

$$- R^2\left[\frac{1}{2}\,z\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}\,arc\,sin\,z + C\right]^{z=0}$$

Si dans la quantité entre crochets on fait $z=0$, le premier terme s'annule, le second devient $\frac{1}{2}$ *arc sin* 0 qui est également nul. Il ne reste que la constante arbitraire C, qui disparaît par soustraction, et on a finalement :

$$A = R^2\left(\frac{1}{2}\,z\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}\,arc\,sin\,z\right) = \frac{R^2}{2}\left(\frac{x}{R}\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}} + arc\,sin\,\frac{x}{R}\right)$$

Telle est l'expression de la surface A M P O. Si nous supposons que le point M vient en B, x devient égal à R, et l'expression ci-dessus nous donne la surface A_1 d'un quadrant :

$$A_1 = \frac{R^2}{2}\left(\sqrt{1-1} + arc\,sin\,1\right) = \frac{R^2}{2}\,arc\,sin\,1 = \frac{R^2}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^2}{4}$$

Et la surface du cercle, qui est égale à celle de quatre quadrants, a pour valeur πR^2.

91. — Mesure des surfaces courbes. — Nous ne traiterons ce problème que dans le cas des surfaces de révolution. Le cas général, d'ailleurs sans difficulté, nous entraînerait en dehors des limites que nous nous sommes fixées dans cet ouvrage.

On appelle *surface de révolution* la surface engendrée par la révolution d'une courbe A B autour d'un axe fixe oz (fig. 23). Nous supposons la courbe A B plane et située dans un même plan avec l'axe o z. Les différents points de A B décriront des cercles situés dans des plans perpendiculaires à oz.

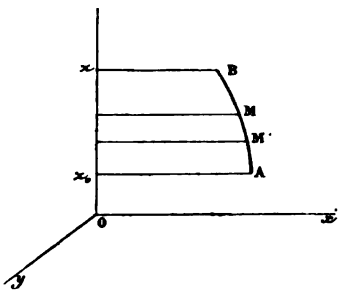

Fig. 23.

Nous considérerons la surface engendrée par A B comme étant la limite de la somme des surfaces des troncs de cône ayant o z pour axe, et engendrés par la révolution autour de o z de cordes infiniment petites telles que M M'.

Soient x_0, z_0; x_1, z_1, les coordonnées des points A et B. Désignons par ds la corde infiniment petite MM'. Nous savons que l'on a (voir n° 74) :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Soit A la surface du solide de révolution comprise entre le cercle décrit par le point A et celui décrit par le point M dont les coordonnées sont x et z. Quand x varie de dx, M vient en M' et A varie d'une quantité dA égale, à un infiniment petit du second ordre près, à la surface du tronc de cône ayant oz pour axe et MM' pour arête[1]. On a donc :

$$dA = ds \times 2\pi \frac{x + (x + dx)}{2} = 2\pi\, x\, ds + \pi\, ds\, dx$$

et, en négligeant le terme $\pi\, ds\, dx$ qui est du second ordre :

$$dA = 2\pi\, x\, ds = 2\pi\, x \sqrt{dx^2 + dz^2} = 2\pi\, x \sqrt{dx^2 \left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}$$

[1] En effet dA est évidemment compris entre la surface de ce tronc de cône et celle du tronc de cône engendré par la portion de la tangente en M à la courbe, comprise entre le point M et la parallèle à ox menée par M'. Or on verrait sans difficulté que les surfaces de ces deux troncs de cône sont égales, à un infiniment petit du second ordre près.

et, en remplaçant $\sqrt{dx^2}$ par $\pm dx$:

$$dA = \pm 2\pi\, x\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

Comme la surface élémentaire dA est évidemment toujours positive, on prendra le signe + ou le signe — suivant que le produit $x\,dx$ sera positif ou négatif, de manière que dA soit toujours positif.

On aura finalement :

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x} \pm x\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

la surface cherchée s'obtiendra en faisant $x = x_1$ dans A.

92. — Exemple : surface de la sphère. — Soit :

$$x^2 + z^2 = R^2$$

l'équation du grand cercle générateur. La surface de la zone comprise entre le plan x o y et le parallèle passant par le point M dont les coordonnées sont x et z, aura pour expression :

$$A = 2\pi \int_{R}^{x} - x\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

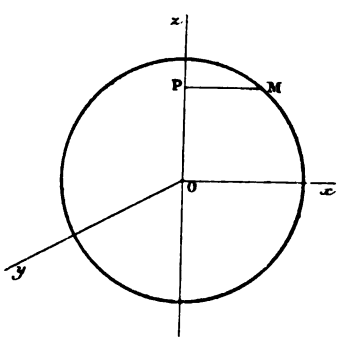

Fig. 24.

Nous prenons le signe —, parce que x variant de R à zéro, dx, et par suite le produit $x\,dx$, est négatif.

L'équation (1) nous donne d'ailleurs en la différenciant :

$$x\,dx + z\,dz = 0$$

d'où nous tirons :

$$x\,dx = -z\,dz$$

et :

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$$

Nous avons donc, en portant dans l'expression de A ces valeurs de $x\,dx$ et de $\frac{dz}{dx}$, et en remarquant que les limites de z qui cor-

respondent à $x = R$ et $x = x$ sont respectivement $z = 0$ et $z = z$:

$$A = 2\pi \int_R^x -x\,dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 2\pi \int_0^z z\,dz \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2}} = 2\pi \int_0^z z\,dz \sqrt{\frac{z^2 + x^2}{z^2}}$$

$$= 2\pi \int_0^z z\,dz \sqrt{\frac{R^2}{z^2}} = 2\pi R \int_0^z dz = 2\pi R z$$

Si on fait $z = R$, on a la surface d'un hémisphère :

$$2\pi R \times R = 2\pi R^2$$

Et la surface de la sphère a pour valeur le double d'un hémisphère, c'est-à-dire $4 \pi R^2$.

§ III. — MESURE DES ARCS DE COURBES PLANES

93. — Détermination analytique de la longueur des arcs de courbes planes.— Soit une courbe A B (fig. 25) rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires ; soit :

$$y = f(x)$$

l'équation de la courbe, supposée résolue par rapport à y. Nous nous proposons de trouver la longueur L de l'arc de courbe compris entre un point quelconque B, ayant pour coordonnées x_1, y_1, et une origine A, prise sur la courbe, et ayant x_0, y_0 pour coordonnées.

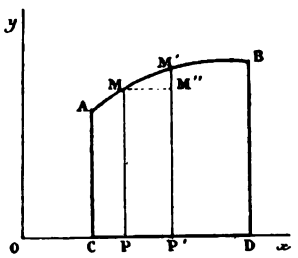

Fig. 25.

Soit M un point compris entre A et B. Soit s l'arc A M, x, y les coordonnées de M. Quand x prend un accroissement dx, M vient en M', et l'arc prend un accroissement ds qui, à un infiniment petit d'ordre supérieur près, est égal à la corde infiniment petite M M' (voir n° 74). Si on mène M M'' parallèle à o x, on a dans le triangle rectangle M M' M'' :

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MM''}^2 + \overline{M'M''}^2$$

ou :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

et par suite :

$$s = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2} + s_0$$

s_0, valeur de s pour $x = x_0$, est évidemment nul. On a donc :

$$s = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \qquad (1)$$

Expression à laquelle on serait arrivé autrement, en remarquant que l'arc A M est bien évidemment la somme des arcs infiniment petits tels que M M'.

Si on fait $x = x_1$, on a la valeur cherchée de l'arc A B :

$$L = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

94. — Exemple : Longueur d'un arc de parabole. — La parabole est une courbe dont nous donnerons plus tard la définition et dont nous étudierons les propriétés principales. Pour le moment, il nous suffit de connaître son équation qui est la suivante :

$$x^2 = 2\,py \qquad (1)$$

en prenant pour axe des x la tangente à la parabole en un point appelé sommet, et pour axe des y, la perpendiculaire en ce point sur l'axe des x (fig. 26).

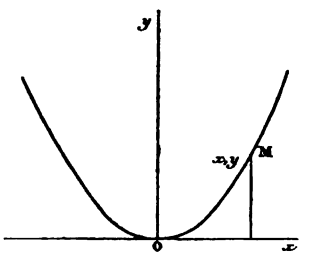

Fig. 26.

Nous nous proposons de déterminer la longueur s d'un arc de courbe o M compris entre l'origine o et un point quelconque M de la courbe dont on connaît les coordonnées x et y.

Nous n'avons qu'à appliquer l'équation (1) du numéro précédent en y faisant $x_0 = 0$, car l'abscisse de l'origine o est évidemment nulle. On a donc :

$$s = \int_{0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

L'équation (1) ci-dessus nous donne :

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2p} = \frac{x}{p}$$

on a donc :

$$s = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} = \frac{1}{p}\int_0^x dx \sqrt{x^2 + p^2} \tag{2}$$

Nous sommes ainsi ramenés à chercher l'intégrale :

$$\int dx \sqrt{x^2 + p^2}$$

Intégrons par parties en posant :

$$u = \sqrt{x^2 + p^2} \quad v = x$$

Nous avons :

$$du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + p^2}} \quad dv = dx$$

L'identité :

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

nous donne :

$$\int dx \sqrt{x^2 + p^2} = x \sqrt{x^2 + p^2} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 + p^2}} \tag{3}$$

Cette dernière intégrale peut s'écrire :

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 + p^2}} = \int \frac{x^2 + p^2 - p^2}{\sqrt{x^2 + p^2}}\, dx = \int \frac{x^2 + p^2}{\sqrt{x^2 + p^2}}\, dx - \int p^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p^2}}$$

$$= \int dx \sqrt{x^2 + p^2} - p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p^2}} \tag{4}$$

Remplaçons dans (3) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 + p^2}}$ par sa valeur tirée de l'équation (4) ; nous avons :

$$\int dx \sqrt{x^2 + p^2} = x \sqrt{x^2 + p^2} - \int dx \sqrt{x^2 + p^2} + p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p^2}}$$

D'où nous tirons :

$$2\int dx\,\sqrt{x^2+p^2} = x\,\sqrt{x^2+p^2} + p^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}} \qquad (5)$$

Nous sommes ainsi ramenés à chercher l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}}$ Cette intégration, qui se rencontre assez souvent dans la pratique, se fait par substitution :

On pose :

$$z = x + \sqrt{p^2+x^2}$$

on en déduit :

$$z - x = \sqrt{p^2+x^2}$$

$$z^2 - 2z\,x + x^2 = p^2 + x^2$$

$$2z\,x = z^2 - p^2$$

$$x = \frac{z^2-p^2}{2z}$$

D'où en appliquant la règle de différentiation d'une fraction :

$$dx = d\,\frac{z^2-p^2}{2z} = \frac{2z \times d\,(z^2-p^2) - (z^2-p^2)\,d\,(2z)}{4z^2}$$

$$dx = \frac{2z \times 2zdz - (z^2-p^2) \times 2dz}{4z^2} = \frac{4z^2 - 2z^2 + 2p^2}{4z^2}\,dz = \frac{z^2+p^2}{2z^2}\,dz$$

si dans l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}}$ nous remplaçons dx et $\sqrt{x^2+p^2}$ par leurs valeurs en fonction de z et de dz, nous avons :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}} = \int \frac{\frac{z^2+p^2}{2z^2}\,dz}{z-x} = \int \frac{\frac{z^2+p^2}{2z^2}\,dz}{z - \frac{z^2-p^2}{2z}} = \int \frac{\frac{z^2+p^2}{2z^2}\,dz}{\frac{2z^2-z^2+p^2}{2z}}$$

$$= \int \frac{\frac{z^2+p^2}{2z^2}\,dz}{\frac{z^2+p^2}{2z}}$$

ou enfin, en supprimant le facteur commun $\frac{z^2+p^2}{2z}$ aux deux termes de la fraction sous le signe $\int$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}} = \int \frac{dz}{z}$$

nous sommes ainsi ramenés à une intégrale connue; nous savons (voir n° 81) que l'on a :

$$\int \frac{dz}{z} = lz + C = l\,(x + \sqrt{p^2+x^2}) + C$$

Remplaçons dans l'équation (5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}}$ par sa valeur, et divisons les deux termes par 2; nous avons :

$$\int dx\,\sqrt{x^2+p^2} = \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{x^2+p^2} + \frac{1}{2}\,p^2\,[l\,(x+\sqrt{p^2+x^2}) + C]$$

Et l'équation (2) donne :

$$s = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}\,x\,\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p^2}{2}\,(l(x+\sqrt{x^2+p^2}) + C)\right]^{x=z}$$
$$-\frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}\,x\,\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p^2}{2}\,(l\,(x+\sqrt{x^2+p^2}) + C)\right]^{x=0}$$

si on fait $x = 0$ dans l'expression entre crochets, on voit qu'elle se réduit à $\frac{p^2}{2}\,l\,p + \frac{p^2C}{2}$; le dernier terme disparaît dans la soustraction et il reste :

$$s = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}\,x\,\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p^2}{2}\,l\,(x+\sqrt{x^2+p^2}) - \frac{p^2}{2}\,l\,p\right]$$
$$= \frac{x\,\sqrt{x^2+p^2}}{2\,p} + \frac{p}{2}\,l\,\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}$$

Telle est l'expression de l'arc de la parabole.

§ III. — MESURE DES VOLUMES

95. — Détermination analytique des volumes. — Supposons que nous nous proposions de déterminer le volume compris à l'intérieur d'une surface dont nous connaissons l'équation :

$$f\,(x, y, z) = 0$$

Nous supposerons que les axes de coordonnées sont deux à deux perpendiculaires (fig. 27).

Coupons la surface par un plan x'o'y' perpendiculaire à l'axe oz; soit z la distance oo' de ce plan au plan xoy; ce plan x'o'y' va couper la surface donnée suivant une certaine courbe plane M N. Soit A la surface de cette courbe; A sera une certaine fonction de z. Il est clair en effet que, la surface étant connue ainsi que la distance z, la courbe M N est déterminée et sa surface également. Donc A dépend de z et nous pouvons poser :

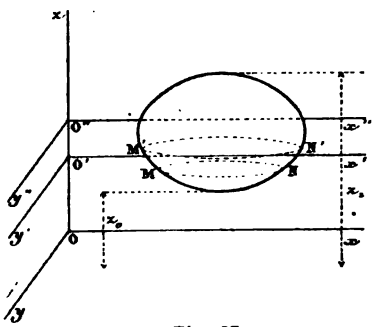

Fig. 27.

$$A = F(z)$$

Désignons par V le volume compris entre l'extrémité inférieure du solide, par exemple, et le plan x'o'y'. Si z prend un accroissement dz, le plan x'o'y' va venir en x''o''y'', la courbe MN en M'N' et le volume V va prendre un accroissement dV égal à un infiniment petit du second ordre près[1] au prisme ayant la courbe MN pour base et o'o'' ou dz pour hauteur. On aura donc :

$$dV = Adz = F(z)\,dz$$

Et par suite :

$$V = V_0 + \int_{z_0}^{z} F(z)\,dz$$

si on désigne par z_0 le z du point le plus bas du solide. On voit que le volume V_0 qui correspond à z_0 est nul; on a donc :

$$V = \int_{z_0}^{z} F(z)\,dz \qquad (1)$$

[1] En effet dV est évidemment compris entre le prisme ayant pour base MN et pour hauteur dz et le prisme ayant pour base M'N' et pour hauteur dz. Le premier a pour mesure Adz, le second $(A + dA)\,dz$. Leur différence $dAdz$ est du second ordre. Par suite dV, compris entre deux quantités qui diffèrent d'un infiniment petit du second ordre, ne diffère de l'une d'elles Adz que d'un infiniment petit du second ordre.

Cherchons, pour effectuer cette intégration à déterminer la fonction $F(z)$. Si nous considérons la courbe MN, nous voyons que cette courbe est le lieu des points de la surface $f(x, y, z) = 0$ pour lesquels z a la valeur oo'. Si donc nous considérons dans cette équation z comme constant et égal à oo', nous voyons que l'x et l'y de chacun des points de cette courbe satisferont à l'équation $f(x, y, z) = 0$; mais x et y représentent les distances d'un point quelconque M de cette courbe aux plans zox, zoy; x et y sont donc identiques aux coordonnées du point M, situé dans le plan x'o'y', rapporté aux deux axes rectangulaires o'x', o'y', tracés dans ce plan.

Par suite l'équation :

$$f(x, y, z) = 0$$

dans laquelle z est considéré comme constant, représente l'équation de la courbe plane MN rapportée aux axes o'x', o'y' tracés dans son plan; la surface A de cette courbe aura pour expression (voir n° 89), x_2, x_3, désignant les abscisses des points de contact des tangentes à la courbe MN parallèles à oy' :

$$A = \int_{x_2}^{x_3} (y - y')\, dx = F(z)$$

y-y' tiré de l'équation $f(x, y, z) = 0$ représentera une certaine fonction de x et de z :

$$y - y = \varphi(x, z)$$

et par suite on aura :

$$V = \int_{z_0}^{z} F(z)\, dz = \int_{z_0}^{z} dz \int_{x_2}^{x_3} \varphi(x, z)\, dx$$

Le volume V est donné par une intégrale double.

Pour obtenir le volume total du solide il suffira de donner à la limite z la valeur z_1, correspondant au point le plus haut du solide.

96. — Mesure des volumes de révolution. — Nous avons dit au n° 91, ce qu'on entend par surface de révolution. Nous allons voir

que la détermination du volume limité par une surface de révolution, n'exige qu'une simple intégration.

Soit oz l'axe de révolution (fig. 28) :

$$f(x, z) = 0 \qquad (1)$$

l'équation d'une courbe tracée dans le plan zox et rapportée aux axes rectangulaires ox, oz. Soit M un point de cette courbe, MP la perpendiculaire abaissée de M sur oz, MP rencontre la courbe génératrice en un certain nombre de points. Supposons pour fixer les idées que ces points soient au nombre de deux, M et M'.

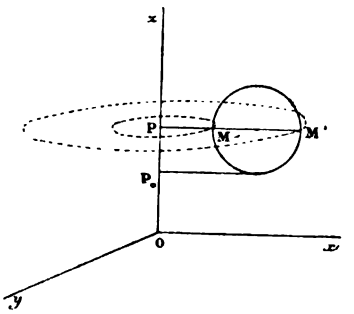

Fig. 28.

La droite MM'P en tournant autour de oz décrit un plan perpendiculaire à oz. Les points M, M' décrivent deux circonférences situées dans ce plan et ayant P pour centre, PM et PM' pour rayons. Ces circonférences sont l'intersection de la surface de révolution avec le plan décrit par la droite PMM'. La surface A du numéro précédent sera donc la différence des deux cercles :

$$\pi\,\overline{PM'}^2 - \pi\,\overline{PM}^2$$

Pour obtenir PM et PM' il suffit de faire $z = oP$ dans l'équation (1) et de la résoudre par rapport à x. Les racines de l'équation en x ainsi obtenues sont respectivement égales à PM, PM'; donc nous aurons directement ces deux longueurs en fonction de z, et par suite nous aurons la surface A sous la forme d'une fonction de z :

$$A = \pi \times F(z)$$

on verra, comme au numéro précédent, que le volume V aura pour expression :

$$V = \int_{z_0}^{z} \pi F(z)\, dz$$

97. — Exemple I. — Volume de la sphère. — La sphère est engendrée par la révolution d'un cercle autour d'un de ses diamètres.

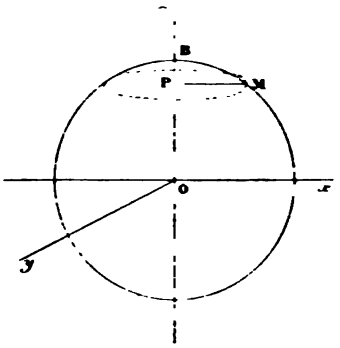

Fig. 29.

Soit oz (fig. 29) le diamètre de la sphère pris pour axe des z ; ox, oy deux axes perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à oz.

Soit M un point du cercle générateur tracé dans le plan zox, MP perpendiculaire sur oz. Le point M décrit une circonférence qui est évidemment l'intersection de la sphère avec le plan passant par MP et perpendiculaire à oz.

Désignons par z la distance oP. Le cercle décrit par le point M a pour mesure :

$$\pi\,\overline{MP}^2$$

Mais on a :

$$\overline{MP}^2 = R^2 - \overline{OP}^2 = R^2 - z^2$$

la surface A du cercle décrit par MP a donc pour valeur :

$$A = \pi\,(R^2 - z^2)$$

Si nous désignons par V le volume de la sphère compris entre le plan x oy et le plan de la circonférence PM, nous voyons que quand z prend un accroissement dz, V prend un accroissement dV égal, à un infiniment petit d'ordre supérieur près, à un prisme infinitésimal ayant A pour base et dz pour hauteur ; on a donc :

$$dV = \pi\,(R^2 - z^2)\,dz$$

Et par suite, en remarquant que z_0 est nul :

$$V = \int_0^z \pi\,(R^2 - z^2)\,dz = \pi \int_0^z (R^2 - z^2)\,dz$$

Mais on a :

$$\int (R^2 - z^2)\,dz = \int R^2\,dz - \int z^2\,dz = R^2 z - \frac{z^3}{3} + C$$

D'où :

$$V = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} + C \right]^{z=z} - \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} + C \right]^{z=0}$$

Le second crochet se réduit à C, et l'on a :

$$V = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]$$

Si on fait $z = \text{oB} = R$, on a le volume d'un hémisphère :

$$V = \pi \left[R^2 \times R - \frac{R^3}{3} \right] = \frac{2}{3} \pi R^3$$

Le volume de la sphère a donc pour valeur $\frac{4}{3} \pi R^3$.

98. — Exemple II. — Volume d'un tore. — Le tore est la surface engendrée par un cercle tournant autour d'une droite située dans son plan.

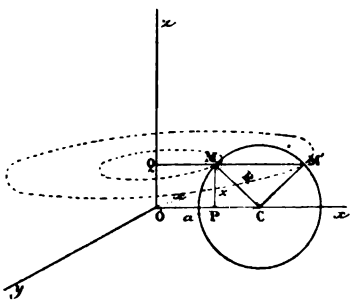

Fig. 30.

Prenons l'axe de révolution pour axe des z (fig. 30) ; pour axe des x une perpendiculaire abaissée du centre C du cercle générateur sur oz. L'axe des y sera perpendiculaire aux deux autres. Désignons par a la distance oC et par R le rayon du cercle générateur. Pour obtenir l'équation de ce cercle, nous remarquerons que l'on a, en désignant par M un point quelconque du cercle :

$$\overline{\text{CM}}^2 = \overline{\text{MP}}^2 + \overline{\text{CP}}^2 = \overline{\text{MP}}^2 + \overline{(\text{oC} - \text{oP})}^2$$

ou :

$$R^2 = z^2 + (a - x)^2 \qquad (1)$$

en désignant par x et z les coordonnées de M. Cette équation (1) est l'équation du cercle générateur.

La surface A de l'intersection du solide de révolution par le plan M'MQ est la différence entre les deux cercles MQ et M'Q :

$$A = \pi \left[\overline{M'Q}^2 - \overline{MQ}^2\right]$$

MQ et M'Q sont les abscisses des points M et M' du cercle qui ont tous deux même ordonnée $oQ = z$. Pour avoir MQ, M'Q, il faut donc résoudre par rapport à x l'équation (1) en y supposant $z = oQ$. Nous avons :

$$R^2 = z^2 + a^2 - 2\,ax + x^2$$

ou :

$$x^2 - 2ax + z^2 + a^2 - R^2 = 0$$

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - (z^2 + a^2 - R^2)} = a \pm \sqrt{R^2 - z^2}$$

On a donc :

$$M'Q = a + \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$MQ = a - \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$\overline{M'Q}^2 - \overline{MQ}^2 = 4\,a\sqrt{R^2 - z^2}$$

Et par suite :

$$A = 4\pi\,a\sqrt{R^2 - z^2}$$

Nous avons ainsi la surface A sous la forme d'une fonction de z.

Le volume V compris entre le plan xoy et le plan décrit par la droite QMM' aura pour équation :

$$V = \int_0^z 4\pi\,a\sqrt{R^2 - z^2}\,dz = 4\pi\,a\int_0^z \sqrt{R^2 - z^2}\,dz$$

Nous sommes ainsi conduits à chercher la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^z \sqrt{R^2 - z^2}\,dz$$

Nous la connaissons, elle a pour expression (voir n° 90) :

$$R^2 \left[\frac{1}{2}\frac{z}{R}\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}+\frac{1}{2}\ arc\ sin\ \frac{z}{R}\right]$$

On a donc :

$$V = 4\,\pi\,a\,R^2\left[\frac{1}{2}\frac{z}{R}\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}+\frac{1}{2}\ arc\ sin.\ \frac{z}{R}\right]$$

Si on fait $z = R$, l'expression précédente nous donne le volume de la moitié du tore situé au-dessus du plan xoy :

$$4\,\pi\,a\,R^2\left[\frac{1}{2}\frac{R}{R}\sqrt{1-\frac{R^2}{R^2}}+\frac{1}{2}\ arc\ sin\ \frac{R}{R}\right] = 2\,\pi\,a\,R^2 \times \frac{\pi}{2} = \pi^2\,a\,R^2$$

Le volume du tore est donc égal à $2\,\pi^2\,a\,R^2$, c'est-à-dire au produit de la surface du cercle générateur $\pi\,R^2$ par la circonférence $2\,\pi\,a$ décrite par le centre C de ce cercle autour de l'axe de révolution oz.

DEUXIÈME PARTIE

ÉTUDE SOMMAIRE

DES

COURBES DU SECOND DEGRÉ

ÉTUDE SOMMAIRE

DES

COURBES DU SECOND DEGRÉ

CHAPITRE PREMIER

RAYONS INFINIS. CLASSIFICATION DES COURBES DU SECOND DEGRÉ

urbes algébriques. — Rayons infinis. — Asymptotes. — Équation d'un ı de n droites passant par l'origine des coordonnées. — Équation des infinis menés de l'origine des coordonnées à une courbe algébrique.

Classification des courbes du second degré. — Équation générale des du second degré. — Rayons infinis des courbes du second degré. — les, paraboles, ellipses.

I. — COURBES ALGÉBRIQUES. — RAYONS INFINIS

Courbes algébriques. — Traçons dans un plan deux axes yy′ (fig. 31); désignons par x la distance d'un point M que du plan à l'axe oy, mesurée parallèlement à l'axe ox, ı distance à l'axe ox, mesurée parallèlement à l'axe oy, ces es étant comptées positivement de o vers x et vers y, néga- ıt de o vers x′ et vers y′. Nous avons vu dans la première le cet ouvrage (voir n° 10) que, si on considère une relation ıque entre x et y :

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

nts dont les coordonnées, mises à la place de x et de y dans ı équation (1), satisfont à cette équation sont sur une même courbe tracée dans le plan.

Nous avons vu aussi que, réciproquement, les coordonnées des

différents points d'une courbe tracée dans le plan xoy satisfont à une équation de la forme $f(x, y) = 0$.

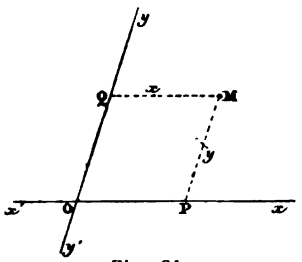

Fig. 31.

Cette équation est appelée l'*équation de la courbe*.

Quand le premier membre de l'équation $f(x, y) = 0$ est une fonction algébrique d'x et d'y (voir n° 7, Ire partie), la courbe est dite *algébrique*.

Quand l'équation d'une courbe algébrique est entière et rationnelle, on appelle *degré* de la courbe le degré de l'équation $f(x, y) = 0$, c'est-à-dire la plus forte somme qu'atteignent les exposants des variables x et y dans un même terme de l'équation de la courbe.

2. — Rayons infinis. — Soit AB une branche de courbe (fig. 32) telle qu'un point mobile M se déplaçant sur cette courbe s'éloigne indéfiniment d'un point fixe du plan, O par exemple. La branche AB est dite *branche infinie*. Si on joint le point fixe O au point mobile M, la droite OM tend vers une certaine position limite OC, quand le point M s'éloigne indéfiniment sur la branche infinie. La droite OC est dite *rayon infini mené du point* O *à la branche de courbe* AB.

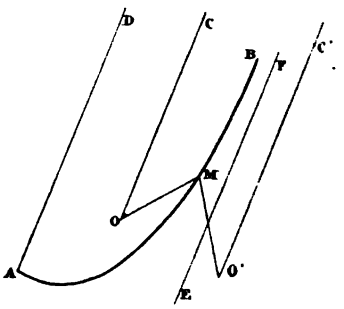

Fig. 32.

Tous les rayons infinis menés des différents points du plan à une même branche de courbe sont parallèles.

En effet, soit O′ un autre point du plan, menons OM, O′M ; quand le point M s'éloigne indéfiniment, les droites OM, O′M tendent vers les rayons infinis OC, O′C′. Ces droites, dont le point d'intersection est la limite du point M, se rencontrent à l'infini ; en d'autres termes, elles sont parallèles.

3. — Asymptotes. — Nous pouvons mener, d'un point A de la

branche de courbe AB, un rayon infini à cette branche de courbe, en menant une parallèle AD à OC. Si nous supposons que le point A se déplace en s'éloignant indéfiniment sur la branche AB, la droite AD se déplace en restant parallèle à elle-même. Quand le point A, en se déplaçant, tend vers l'infini, la droite AD tend, en général, vers une certaine position limite EF, qu'on appelle l'*asymptote* de la branche de courbe AB.

On voit qu'un rayon infini quelconque a un point d'intersection avec la courbe situé à l'infini. L'asymptote en a deux. On a vu d'ailleurs (Ire partie, n° 73) qu'on appelait tangente à une courbe la limite de la position d'une sécante qui se déplace de telle manière que deux de ses points d'intersection avec la courbe se confondent en un seul. On voit par ce qui précède qu'une asymptote est une tangente à la courbe en un point situé à l'infini.

4. — Equation d'un faisceau de n lignes droites passant par l'origine des coordonnées. — Nous avons vu que l'équation d'une ligne droite était une équation du premier degré (Ire partie, n° 70) et que, réciproquement, une équation du premier degré représentait une ligne droite.

Nous avons vu également (Ire partie, n° 70, remarque I) que, si une ligne droite oA (fig. 33) passe par l'origine des coordonnées, son équation ne renferme pas de terme constant, et qu'elle est de la forme :

$$y - m\,x = 0$$

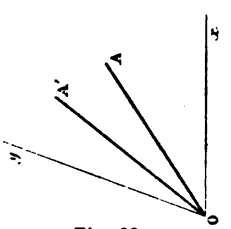

Fig. 33.

Soit oA′ une seconde ligne droite passant par l'origine. Soit :

$$y - m'x = 0$$

Son équation. Nous allons faire voir que le faisceau formé par les deux lignes droites oA , oA′, est représenté par le produit des premiers membres de leurs équations, égalé à zéro :

$$(y - mx)\,(y - m'x) = 0 \qquad (1)$$

Je dis que l'équation (1) représente bien les deux droites oA,

oA'. En effet, supposons d'abord que x et y représentent les coordonnées d'un point quelconque de l'une de ces deux droites; x et y annulent soit le facteur $y - mx$, soit le facteur $y - m'x$, et par suite le produit de ces deux facteurs. Donc les coordonnées d'un point quelconque des droites oA, oA', satisfont à l'équation (1).

Réciproquement, pour que l'équation (1) soit satisfaite, c'est-à-dire pour que le produit des deux facteurs $(y - mx)$, $(y - m'x)$ soit nul, il faut que l'un ou l'autre de ces facteurs soit nul; par conséquent x et y, étant les coordonnées d'un point de la courbe représentée par l'équation (1), annuleront soit $y - mx$ soit $y - m'x$; par suite le point (x, y) se trouvera sur l'une des deux droites représentées par les équations $y - mx = 0$, $y - m'x = 0$.

On verrait de même qu'un faisceau de n droites passant par l'origine est représenté par le produit de n facteurs, de la forme $y - mx$, égalé à zéro :

$$(y - mx)(y - m'x)(y - m''x)\ldots(y - m_n x) = 0 \qquad (1)$$

et que, réciproquement, un produit de cette forme représente le faisceau des n droites passant par l'origine, ayant pour équations respectives $y - mx = 0$; $y - m'x = 0 \ldots y - m_n x = 0$.

On sait qu'on appelle *équation homogène* une équation algébrique dont tous les termes sont de même degré; on sait également que les résultats de la multiplication d'un nombre quelconque de polynomes homogènes est un polynome homogène dont le degré est égal à la somme des degrés des facteurs.

Les n polynomes $(y - mx)$, $(y - m'x)$, $(y - m''x)$, $(y - m_n x)$ sont homogènes du premier degré en x et y; leur produit est donc homogène et de degré n en x et y.

On voit donc qu'un faisceau de n lignes droites menées de l'origine est représenté par une équation homogène de degré n en x et y.

Réciproquement une équation homogène de degré n en x et en y représente un faisceau de n lignes droites passant par l'origine. En effet, soit :

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} y + A_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + A_{n-1} x y^{n-1} + A_n y^n = 0$$

une équation homogène de degré n en x et en y.

Divisons par x^n les deux termes de cette équation et posons :

$$\frac{y}{x} = \alpha$$

Nous aurons :

$$A_0 + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + \ldots + A_{n-1} \alpha^{n-1} + A_n \alpha^n = 0$$

L'équation (2) est une équation algébrique de degré n en α. On démontre en algèbre qu'elle admet n racines, réelles ou imaginaires, et que, si nous désignons ces n racines par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$, le premier membre de l'équation (2) est identique au produit :

$$A_n (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)(\alpha - \alpha_3) \ldots (\alpha - \alpha_n)$$

On a donc :

$$A_n (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)(\alpha - \alpha_3) \ldots (\alpha - \alpha_n) = 0 \qquad (3)$$

Remplaçons dans (3) α par $\frac{y}{x}$. Nous avons :

$$A_n \left(\frac{y}{x} - \alpha_1\right)\left(\frac{y}{x} - \alpha_2\right)\left(\frac{y}{x} - \alpha_3\right) \cdots \left(\frac{y}{x} - \alpha_n\right) = 0$$

ou, en multipliant par x_n, ce que nous ferons en multi pliant par x chaque facteur de la forme $\left(\frac{y}{x} - \alpha_p\right)$:

$$A_n (y - \alpha_1 x)(y - \alpha_2 x)(y - \alpha_3 x) \cdots (y - \alpha_n x) = 0$$

équation qui représente, d'après ce que nous avons établi ci-dessus, le faisceau des n lignes droites passant par l'origine et ayant respectivement pour équations :

$$y = \alpha_1 x, \quad y = a_2 x, \ldots y = a_n x$$

Donc une équation homogène de degré n en x et y représente bien un faisceau de n droites passant par l'origine.

Ces droites n'existent réellement que dans le cas où les racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ sont réelles. A une racine imaginaire α_p, correspond une équation homogène du premier degré $(y - \alpha_p x) = 0$ qui géométriquement ne représente rien. Toutefois, pour généraliser certaines solutions, on dit qu'une telle équation représente

une *droite imaginaire;* on voit que l'équation homogène donnée représente un faisceau de n droites, réelles ou imaginaires, passant par l'origine.

5. — Théorème. — On obtient le faisceau des rayons infinis menés de l'origine des coordonnées à une courbe algébrique de degré n en égalant à zéro l'ensemble des termes du degré n dans l'équation de cette courbe.

Supposons que, dans l'équation d'une courbe algébrique de degré n nous désignions par $F_n(x, y)$ l'ensemble des termes de degré n; par $F_{n-1}(x, y)$, l'ensemble des termes de degré $(n-1)$ ... et par C le terme indépendant d'x et d'y.

L'équation de cette courbe sera :

$$F_n(x, y) + F_{(n-1)}(x, y) + F_{(n-2)}(x, y) \ldots + F_1(x, y) + C = 0 \qquad (1)$$

Nous nous proposons de déterminer les rayons infinis menés de l'origine aux différentes branches infinies de cette courbe. Soit :

$$y = \alpha x \qquad (2)$$

l'équation d'une ligne droite passant par l'origine. Cherchons quelle devra être la valeur de α pour que cette droite soit un rayon infini.

A cet effet, proposons-nous de trouver les coordonnées d'un point d'intersection de la droite (2) et de la courbe (1). Ces coordonnées x et y devront satisfaire à la fois aux équations (1) et (2). Par suite, si on fait $y = \alpha x$ dans l'équation (1), on aura une équation en x qui sera satisfaite par l'abscisse du point d'intersection cherché. Cette équation sera :

$$F_n(x, \alpha x) + F_{(n-1)}(x, \alpha x) + F_{(n-2)}(x, \alpha x) + \ldots + F_1(x, \alpha x) + C = 0 \quad (3)$$

Les fonctions F_n, F_{n-1}, $F_{n-2} \ldots F_1$ ne contiendront plus chacune qu'un terme, en x^n pour la fonction F_n, en x^{n-1} pour la fonction F_{n-1}, ... en x pour F_1.

Mettons en facteur dans chacun des termes de l'équation (3), la puissance de x qui s'y trouve ; nous avons :

$$x^n F_n(1, \alpha) + x^{(n-1)} F_{(n-1)}(1, \alpha) + x^{n-2} F_{(n-2)}(1, \alpha) + \text{-----} + x F_1(1, \alpha) + C = 0 \quad (4)$$

Telle sera l'équation qui nous donnera l'abscisse x d'un point d'intersection de la droite $y - \alpha x = 0$ et de la courbe donnée[1].

Divisons par x^n les deux termes de l'équation (4) ; nous avons :

$$F_n(1, \alpha) + \frac{1}{x} F_{(n-1)}(1, \alpha) + \ldots + \frac{1}{x^{n-1}} F_1(1, \alpha) + \frac{C}{x^n} = 0$$

Si la droite $y - \alpha x = 0$ est un rayon infini, cette droite rencontrera la courbe en un point situé à l'infini, c'est-à-dire en un point dont les coordonnées sont infiniment grandes. Donc l'équation (4) et l'équation (5), qui en est déduite, seront satisfaites par une valeur infiniment grande de x.

Mais, quand x tend vers ∞, les fractions $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3} \cdots \frac{1}{x^{n-1}}, \frac{1}{x^n}$, tendent vers zéro ; les n derniers termes de l'équation (5) s'annulent, et il reste :

$$F_n(1, \alpha) = 0 \tag{6}$$

Cette équation (6) est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (4) admette une racine infiniment grande, c'est-à-dire pour que la droite $y = \alpha x$ rencontre la courbe donnée en un point situé à l'infini.

Les équations des rayons infinis s'obtiendront donc en donnant, dans l'équation générale d'une droite passant par l'origine :

$$y = \alpha x$$

au coefficient α, des valeurs égales aux racines de l'équation (6), obtenue en remplaçant, dans l'ensemble des termes de degré n de l'équation de la courbe, x par 1 et y par α, et en égalant à zéro le résultat de cette substitution.

Pour avoir l'équation du faisceau formé par ces rayons infinis, il suffit, comme nous l'avons vu au numéro précédent, de remplacer α par $\frac{y}{x}$ dans l'équation (6), ce qui nous donne en multipliant par x^n :

$$x^n F_n\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0 \text{ ou } F_n(x, y) = 0$$

[1] Cette équation, étant de degré n, admettra n racines, réelles ou imaginaires, ce qui montre qu'une droite coupe une courbe du n^e degré en n points réels ou imaginaires.

Donc le faisceau des rayons infinis menés de l'origine à une branche de courbe s'obtient en égalant à zéro l'ensemble des termes du plus haut degré dans l'équation de cette courbe ; ce qu'il fallait démontrer.

§ II. — CLASSIFICATION DES COURBES DU SECOND DEGRÉ

6. — Equation générale des courbes du second degré. — Une courbe du second degré est, d'après ce que nous avons dit en commençant, une courbe représentée par une équation entière et rationnelle du second degré en x et en y.

Une telle équation contiendra évidemment : 1° des termes du second degré en x et en y ; 2° des termes du premier degré en x et en y ; 3° des termes indépendants de x et de y.

Nous pourrons toujours réunir en un seul les termes qui ne diffèrent que par les coefficients des variables, et supposer la somme des coefficients de chacun de ces termes représentée par une seule lettre.

Le nombre des termes du second degré sera ainsi de trois au maximum ; un terme en x^2, un en xy, un en y^2. Le nombre des termes du premier degré sera au plus de deux ; un en x, un en y. Enfin il n'y aura qu'un terme constant, égal à la somme de tous les termes qui ne contiennent ni x ni y.

L'équation générale des courbes du second degré sera donc :

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2ex + 2fy + c = 0 \qquad (1)$$

Nous désignons par a la somme algébrique, positive ou négative, des termes en x^2, par b celle des termes en y^2, par $2h$ celle des termes en xy, par $2e$ celle des termes en x, par $2f$ celle des termes en y, par c celle des termes indépendants de x et de y.

La seconde partie de cet ouvrage a pour but d'étudier les propriétés les plus importantes des courbes représentées par l'équation générale ci-dessus.

7. — Rayons infinis des courbes du second degré. — Nous avons démontré au n° 5 que les équations des rayons infinis, menés de

l'origine des coordonnées à une courbe algébrique, s'obtiennent en donnant dans l'équation :

$$y = \alpha x$$

au coefficient α, des valeurs égales aux racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le résultat de la substitution de α à la place de y et de 1 à la place de x, dans l'ensemble des termes de plus haut degré de l'équation de la courbe.

Si dans l'équation 1 du n° précédent nous remplaçons, dans les termes du second degré, y par α et x par 1, nous obtenons, en égalant à zéro le résultat ainsi obtenu :

$$a + b\alpha^2 + 2h\alpha = 0$$

équation du second degré en α dont les racines sont:

$$\alpha' = \frac{-h + \sqrt{h^2 - ab}}{b}$$

$$\alpha'' = \frac{-h - \sqrt{h^2 - ab}}{b}$$

Les deux rayons infinis ont donc pour équation.

$$y - x\frac{-h + \sqrt{h^2 - ab}}{b} = 0$$

$$y - x\frac{-h - \sqrt{h^2 - ab}}{b} = 0$$

Discutons ce résultat. Trois cas peuvent se présenter:

Premier cas. $h^2 - ab > 0$. La quantité sous le radical est positive. Le radical est réel. Par suite, il existe deux rayons infinis menés de l'origine à la courbe. La courbe admet des branches infinies dans deux directions différentes.

Deuxième cas. $h^2 - ab = 0$. La quantité sous le radical est nulle. Les deux rayons infinis se confondent en un seul. La courbe admet des branches infinies, mais dans une seule direction.

Troisième cas. $h^2\ ab < 0$. La quantité sous le radical est négative. Le radical est imaginaire; les rayons infinis également. En d'autres termes, la courbe n'admet pas de branches infinies; elle est fermée.

Les courbes correspondant au premier cas s'appellent des *hyperboles*. Celles qui correspondent au second cas s'appellent des *paraboles*. Celles qui correspondent au troisième cas s'appellent des *ellipses*.

CHAPITRE II

CENTRES. — DIAMÈTRES. — AXES. — ASYMPTOTES —

§ I. — Centre d'une courbe. — Condition nécessaire et suffisante pour que deux équations du second degré représentent la même courbe. — Condition pour que l'origine des coordonnées soit le centre d'une courbe du second degré. — Changement d'origine. — Recherche des centres des courbes du second degré.

§ II. — Diamètre des courbes du second degré. — Courbes à centres. — Diamètre conjugués. — Équation d'une courbe du second degré à centre rapportée à deux diamètres conjugués. — Signification des coefficients des différentes puissances des variables dans cette courbe. — Diamètres de la parabole. — Équation de la parabole rapportée à un diamètre et à une tangente à l'extrémité de ce diamètre.

§ III. — Axe des courbes du second degré. — Courbes à centre. — Equation d'une courbe du second degré à centre rapportée à ses axes. — Variation de la longueur du demi-diamètre d'une courbe du second degré à centre. — Axe de la parabole. — Équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet.

§ IV. — Asymptotes des courbes du second degré. — Hyperbole. — Parabole.

§ I. — CENTRES DES COURBES DU SECOND DEGRÉ

8. — Centre d'une courbe. — On dit qu'une courbe AB (fig. 34) admet un point C pour *centre de symétrie*, ou plus simplement pour *centre*, quand les points de la courbe sont deux à deux symétriques par rapport au point C. En d'autres termes, M étant un point quelconque de la courbe, si nous tirons CM, et que nous prolongions cette ligne droite d'une longueur CM' = CM, le point C sera un centre pour la courbe AB, si le point M', ainsi obtenu, se trouve sur cette courbe.

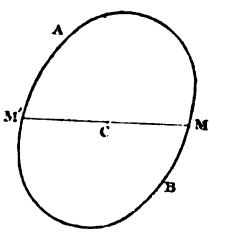

Fig. 34.

9. — Lemme. — La condition nécessaire et suffisante pour que deux équations du second degré représentent la même courbe est que les coefficients des termes de mêmes degrés par rapport aux variables

dans les deux équations soient proportionnels. — *La condition est suffisante.* En effet soient :

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2ex + 2fy + c = 0 \qquad (1)$$

$$a'x^2 + b'y^2 + 2h'xy + 2e'x + 2f'y + c' = 0 \qquad (2)$$

deux équations du second degré. Supposons que l'on ait :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} = \frac{e}{e'} = \frac{f}{f'} = \frac{c}{c'} = k$$

Les termes de l'équation (2) sont respectivement égaux aux termes de l'équation (1), multipliés par $\frac{1}{k}$. Cette équation (2) peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{k}(ax^2 + by^2 + 2hxy + 2ex + 2fy + c) = 0 \qquad (3)$$

L'équation (3) montre que si les coordonnées x et y d'un point du plan annulent le premier membre de l'équation (1), elles annulent également le premier membre de l'équation (2), et réciproquement. Donc si la condition énoncée est satisfaite, tout point de la courbe représentée par l'équation (1) se trouve sur la courbe représentée par l'équation (2) et réciproquement. Les deux équations représentent donc bien la même courbe. Donc la condition énoncée est suffisante.

2° *La condition est nécessaire.* Supposons en effet que les équations (1) et (2) représentent la même courbe. Dans ce cas, si nous donnons à y une certaine valeur β, les abscisses respectives des points des deux courbes ayant β pour ordonnée doivent être identiques. Donc les équations en x, obtenues en remplaçant y par β dans les équations (1) et (2), doivent avoir les mêmes racines, quel que soit β. Ces équations sont les suivantes :

$$ax^2 + 2(e + h\beta)x + b\beta^2 + 2f\beta + c = 0 \qquad (4)$$

$$a'x^2 + 2(e' + h'\beta)x + b'\beta^2 + 2f'\beta + c' = 0 \qquad (5)$$

Soient x_1, x_2 les racines de l'équation (4). Nous savons que le premier membre de cette équation est identique au produit

$a(x-x)(x-x_2)$. De même, x_1, x_2 étant également les racines de l'équation (5), le premier membre de cette équation est identique au produit $a'(x-x_1)(x-x_2)$. Les coefficients de x^2, de x, et du terme indépendant de x dans les équations (4) et (5) sont donc respectivement égaux aux produits de mêmes qualités multipliées par a et par a'. Ces coefficients sont par suite entre eux dans un rapport égal à $\frac{a}{a'}$, et l'on a :

$$\frac{a}{a'} = \frac{e + h\beta}{e' + h'\beta} = \frac{b\beta^2 + 2f\beta + c}{b'\beta^2 + 2f'\beta + c'} \tag{6}$$

De ces équations (6) nous tirons :

$$\beta(ah' - ha') + ae' - ea' = 0 \tag{7}$$

$$\beta^2(ab' - ba') + 2\beta(af' - fa') + ac' - ca' = 0 \tag{8}$$

Ces équations (7) et (8) devant être satisfaites pour toute valeur de β, les coefficients des différentes puissances de β et les termes indépendants de β doivent y être nuls, ce qui donne :

$$ah' - ha' = 0 \quad ae' - ea' = 0 \quad ab' - ba' = 0 \quad af' - fa' = 0 \quad ac' - ca' = 0 \tag{9}$$

Des équations (9) on déduit :

$$\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} = \frac{e}{e'} = \frac{b}{b'} = \frac{f}{f'} = \frac{c}{c'} \tag{10}$$

Les équations (10) nous font voir que si les équations (1) et (2) représentent la même courbe, la condition énoncée est satisfaite. Donc cette condition est nécessaire.

Remarque. — Si a et a' étaient nuls, la démonstration précédente cesserait d'être applicable. Dans ce cas, si b et b' ne sont pas nuls, on répétera le même raisonnement en exprimant que pour une même valeur α donnée à x les équations (1) et (2) donnent pour y des valeurs identiques, quel que soit α. On retrouvera ainsi les mêmes équations (10).

Si a, a', b, b' sont nuls, h et h' ne le sont pas puisque les équations (1) et (2) renferment des termes du second degré; ces équations se réduisent à :

$$2hxy + 2ex + 2fy + c = 0 \tag{11}$$

$$2h'xy + 2e'x + 2f'y + c' = 0 \tag{12}$$

Si dans ces équations nous faisons $y = \beta$, elles nous donnent pour x les valeurs suivantes : $\frac{2f\beta + c}{2(h\beta + e)}$ et $\frac{2f'\beta + c'}{2(h'\beta + e')}$. Ecrivons que ces valeurs sont égales quel que soit β ; nous avons :

$$\frac{2f\beta + c}{h\beta + e} = \frac{2f'\beta + c'}{h'\beta + e'}$$

ou

$$2\beta^2 (hf' - fh') + \beta [(hc' - ch') + 2 (ef' - fe')] + ec' - ce' = 0$$

Les coefficients des différentes puissances de β et le terme constant doivent être nuls. Exprimons cette condition pour le terme en β^2 et le terme constant ; nous avons :

$$hf' - fh' = 0 \qquad ec' - ce' = 0 \tag{13}$$

Si nous avions exprimé que les équations (11) et (12) donnent, pour une même valeur α de x, des valeurs identiques de y, quel que soit α, nous aurions obtenu les équations suivantes, déduites des équations (13) en y permutant simultanément e et f, e' et f'.

$$he' - eh' = 0 \qquad fc' - cf' = 0 \tag{14}$$

Des équations (13) et (14) nous déduisons :

$$\frac{h}{h'} = \frac{e}{e'} = \frac{f}{f'} = \frac{c}{c'} \tag{15}$$

Les équations (15) établissent que, dans le cas où a, b, a', b' s'annulent, la condition énoncée est encore nécessaire. Elle l'est donc dans tous les cas.

10. — Si l'origine des coordonnées est le centre d'une courbe du second degré, l'équation de cette courbe ne contient pas de termes du premier degré par rapport aux variables, et réciproquement. — En effet, soit une courbe du second degré A B (figure 35), je suppose que cette courbe admet pour centre l'origine des coordonnées. Si le point M ayant pour coordonnées o P $= x$, M P $= y$ est un point de la courbe, le point M′ situé sur le prolongement de la droite o M, à une distance du point o, o M′ = o M, doit être également un point de la courbe.

Soient o P′, M′ P′ les coordonnées x' et y' du point M′ ; les deux triangles o M P, o M′ P′ sont égaux comme ayant les angles égaux et un côté égal oM = oM′; on a par suite :

$$oP' = oP \qquad M'P' = MP$$

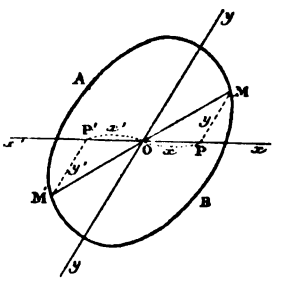

Fig. 35.

Les coordonnées du point M′, x' et y', sont, on le voit, égales en valeur absolue aux coordonnées du point M. Elles sont d'ailleurs de signes contraires. Donc on a :

$$x' = -x \qquad y' = -y$$

On voit donc que, si la courbe A B admet pour centre de symétrie l'origine des coordonnées, x et y étant les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, $-x$ et $-y$ sont les coordonnées d'un autre point de la courbe.

Il est clair d'ailleurs que si cette condition est remplie, l'origine est un centre de symétrie pour la courbe, car les points de coordonnées x, y, $-x$, $-y$, sont symétriques par rapport à l'origine. Donc, la condition étant remplie, les points de la courbe sont deux à deux symétriques par rapport à l'origine, en d'autres termes l'origine est un centre.

Donc pour que l'origine des coordonnées soit un centre, il faut et il suffit que, x, y, désignant les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, $-x$, $-y$, soient les coordonnées d'un autre point de la même courbe.

Exprimons cette condition ; soit :

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2ex + 2fy + c = 0 \qquad (1)$$

l'équation de la courbe A B ; x et y étant les coordonnées d'un point de cette courbe, posons $x_1 = -x$, $y_1 = y$; x et y satisfont à l'équation (1). Remplaçons dans cette équation x par $-x_1$, y par $-y_1$; l'équation ainsi obtenue représentera le lieu géométrique des points x_1, y_1 ; c'est-à-dire une courbe telle que les coordonnées de ses points seront deux à deux égales et de signes contraires aux coordonnées de A B. Cette équation est la suivante :

$$ax_1^2 + by_1^2 + 2hx_1y_1 - 2ex_1 - 2fy_1 + c = 0 \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) doivent représenter la même courbe. Nous avons vu au n° 9 que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que les coefficients des mêmes puissances des variables soient proportionnels dans les deux équations, ce qui nous donne :

$$\frac{a}{a}=\frac{b}{b}=\frac{h}{h}=\frac{e}{-e}=\frac{f}{-f}=\frac{c}{c}$$

Ces conditions se réduisent à :

$$\frac{e}{-e}=1 \quad \text{ou} \quad e=-e \quad 2e=0 \quad e=0 \tag{3}$$

$$\frac{f}{-f}=1 \quad \text{ou} \quad f=-f \quad 2f=0 \quad f=0 \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) nous montrent que la condition nécessaire et suffisante pour que l'origine des coordonnées soit un centre pour la courbe AB, est que les coefficients e et f des termes du premier degré en x et en y dans l'équation de cette courbe soient nuls.

11. — Nous venons de voir quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'origine des coordonnées soit un centre. Proposons-nous maintenant de répondre à cette question : une courbe du second degré admet-elle toujours un centre?

Si une courbe du second degré admet un centre on le reconnaîtra immédiatement en prenant ce point pour origine des coordonnées.

Si nous connaissons seulement l'équation de la courbe rapportée à des axes quelconques, il nous suffira de voir si, en substituant aux premiers axes d'autres, respectivement parallèles aux premiers et de même sens, mais se coupant en un autre point du plan, l'équation de la courbe rapportée aux seconds axes peut, si ces nouveaux axes sont convenablement choisis, ne plus contenir de termes du premier degré en x en y. S'il en est ainsi la nouvelle origine sera un centre de symétrie pour la courbe.

Nous sommes ainsi ramenés à résoudre accessoirement le problème suivant: *Etant donné l'équation d'une courbe rapportée à deux axes* ox, oy *que devient cette équation, si à ces axes on en substitue*

d'autres o_1x_1, o_1y_1 *respectivement parallèles à* ox, oy, *et dirigés dans le même sens.*

Soient $oo_2 = \alpha$, $o_2o_1 = \beta$ (fig. 36) les coordonnées du point o_1, par rapport aux axes ox, oy. Soit M un point du plan, $oP = x$, $MP = y$ ses coordonnées dans le système xoy; $o_1P_1 = x_1$, $M_1P_1 = y_1$ ses coordonnées dans le système $x_1o_1y_1$. On a évidemment :

$$x = oP = oo_2 + o_2P = oo_2 + o_1P_1 = \alpha + x_1$$
$$y = MP = PP_1 + MP_1 = o_1o_2 + MP_1 = \beta + y_1$$

Soit maintenant $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe dans le système xoy. Le point M étant un point de cette courbe, ses coordonnées x et y satisfont à l'équation $f(x,y) = 0$. Si nous remplaçons dans cette équation x par $\alpha + x_1$, y par $\beta + y_1$, nous obtenons l'équation qui exprime la relation liant x_1 à y_1 pour tous les points de la courbe, c'est-à-dire l'équation de la courbe dans le système $x_1o_1y_1$:

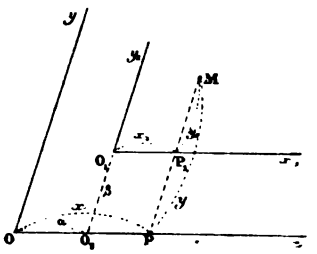

Fig. 36.

$$f(\alpha + x_1, \beta + y_1) = 0$$

On voit donc que si on connaît l'équation d'une courbe dans le système xoy, pour avoir son équation par rapport aux axes o_1x_1, o_1y, respectivement parallèles à ox, oy, il suffit de remplacer dans l'équation donnée x par $\alpha + x_1$, y par $\beta + y_1$, α, β désignant les coordonnées de la nouvelle origine dans le système primitif.

12. — Recherche du centre des courbes du second degré. — Ceci posé revenons à l'équation générale des courbes du second degré et cherchons la condition pour qu'un point du plan, dont les coordonnées sont α et β, soit le centre de cette courbe.

Transportons les axes des coordonnées parallèlement à eux-mêmes de manière à prendre le point α, β pour nouvelle origine des coordonnées. Nous adopterons les mêmes notations que dans le numéro précédent.

L'équation de la courbe rapportée aux nouveaux axes s'obtien-

dra en remplaçant, dans l'équation générale des courbes du second degré, x par $\alpha + x_1$, y par $\beta + y_1$, ce qui nous donne :

$$a(\alpha + x_1)^2 + b(\beta + y_1)^2 + 2h(\alpha + x_1)(\beta + y_1) + 2e(\alpha + x_1) + 2f(\beta + y_1) + c = 0$$

Développons et ordonnons par rapport à x_1, y_1 ; il vient :

$$ax_1^2 + by_1^2 + 2hx_1y_1 + 2(a\alpha + h\beta + e)x_1 + 2(b\beta + h\alpha + f)y_1 + a\alpha^2 + b\beta^2 + 2h\alpha\beta + 2e\alpha + 2f\beta + c = 0 \quad (1)$$

Pour que la nouvelle origine soit un centre, il faut et il suffit que l'on ait :

$$a\alpha + h\beta + e = 0 \quad (2)$$

$$b\beta + h\alpha + f = 0 \quad (3)$$

Si nous avons choisi les coordonnées α, β, du point o, dans le système xoy, de manière que les équations (2) et (3) soient satisfaites, le point o, sera un centre.

Nous sommes ainsi conduits à résoudre deux équations du premier degré à deux inconnues. Nous trouvons pour valeur de α et de β :

$$\alpha = \frac{be - fh}{h^2 - ab}$$

$$\beta = \frac{af - eh}{h^2 - ab}$$

Si $h^2 - ab$ est différent de zéro, on trouve pour α et β des valeurs réelles et finies. Si $h^2 - ab$ est nul α et β sont infiniment grands.

Donc l'ellipse et l'hyperbole ont un centre. La parabole a un centre à l'infini, ou, en d'autres termes, n'a pas de centre à distance finie.

Nous avons déjà classé les courbes du second degré en nous appuyant sur la considération des branches infinies ; la considération du centre permet maintenant de compléter ce classement. Nous voyons que les trois genres de courbes du second degré ont les caractères suivants :

1° L'ellipse est une courbe fermée à centre ;

2° La parabole a des branches infinies, mais dans une direction seulement, et n'a pas de centre ;

3° L'hyperbole a des branches infinies dans deux directions et a un centre.

Désormais, quand nous voudrons étudier les propriétés des courbes à centre, nous pourrons supposer que nous avons pris le centre pour origine des coordonnées, et l'équation générale des courbes du second degré se trouvera simplifiée comme il suit, par la suppression des termes du premier degré :

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + c = 0$$

§ II. — DIAMÈTRES DES COURBES DU SECOND DEGRÉ

13. — Diamètres des courbes du second degré à centre. — On appelle *diamètre* d'une courbe le lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à une direction donnée.

Nous allons démontrer que, **dans une courbe du second degré à centre, la droite joignant le centre à un point quelconque de la courbe est le diamètre des cordes parallèles à la tangente à la courbe au point considéré.**

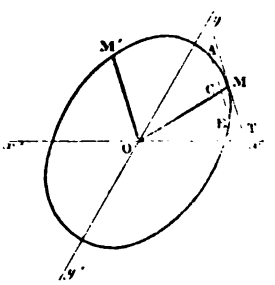

Fig. 37.

Soit une courbe du second degré à centre, ellipse ou hyperbole, o le centre (fig. 37), M un point de la courbe, MT la tangente en M ; AB une corde quelconque parallèle à MT. Je dis que la droite oM coupe la droite AB en son milieu C.

Prenons le point o pour origine des coordonnées. L'équation générale de la courbe sera :

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + 2hxy + c = 0 \qquad (1)$$

Soient x_1, y_1, les coordonnées du point M. L'équation de la tangente en M est (voir Ire partie, n° 73) :

$$(y - y_1) f'_{y_1} + (x - x_1) f'_{x_1} = 0 \qquad (2)$$

Dérivons l'équation (1) successivement par rapport à x et à y. Nous avons :

$$f'_{x_1} = 2ax_1 + 2hy_1$$
$$f'_{y_1} = 2by_1 + 2hx_1$$

L'équation (2) devient, en remplaçant f'_{x_1}, f_{y_1} par leurs valeurs et en divisant par 2 :

$$(y - y_1)(by_1 + hx_1) + (x - x_1)(ax_1 + hy_1) = 0 \tag{3}$$

ou :

$$y = -\frac{ax_1 + hy_1}{hx_1 + by_1}x + y_1 + x_1\frac{ax_1 + hy_1}{hx_1 + by_1} \tag{4}$$

le coefficient de x dans cette équation est ce que nous avons appelé (voir Ire partie n° 72) le coefficient angulaire de la droite MT. Désignons le par la lettre m.

$$m = -\frac{ax_1 + hy_1}{hx_1 + by_1} \tag{5}$$

Nous avons vu que deux droites parallèles ont même coefficient angulaire. Par suite, les cordes telles que AB, parallèles à MT, auront pour équation :

$$y = mx + n \tag{6}$$

dans laquelle m sera constant et n variable suivant la position de la corde. Cherchons quelles seront les coordonnées des points A et B où la droite (6) coupe la courbe (1). Ces coordonnées satisferont à la fois aux équations (1) et (6). Remplaçons dans (1) y par sa valeur $mx + n$, tirée de (6) nous avons une équation en x :

$$ax^2 + b(mx + n)^2 + 2hx(mx + n) + c = 0 \tag{7}$$

Cette équation (7) est du second degré. Elle admet deux racines x', x'', qui sont les abscisses des points A et B.

Pour avoir les ordonnées y', y'' des mêmes points, il suffit de remplacer dans (1) x par sa valeur $\left(\frac{y}{m} - \frac{n}{m}\right)$ tirée de (6), ce qui nous donne l'équation du second degré en y :

$$a\left(\frac{y}{m} - \frac{n}{m}\right)^2 + by^2 + 2hy\left(\frac{y}{m} - \frac{n}{m}\right) + c = 0 \tag{8}$$

cette équation a deux racines y', y'', qui sont les ordonnées des points A et B.

Sans qu'il soit besoin de résoudre ces équations (7) et (8), nous allons en déduire les coordonnées du point C, que nous désignerons par x''' et y'''.

En effet, C étant le milieu de AB (fig. 38), si nous menons les ordonnées AD, BE, CF, nous voyons que l'on a :

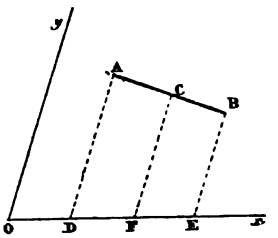

Fig. 38.

$$DF = \frac{DE}{2}$$

$$oF = oD + DF = oD + \frac{DE}{2} = oD + \frac{oE - oD}{2}$$
$$= \frac{2oD + oE - oD}{2} = \frac{oD + oE}{2}$$

ou

$$x''' = \frac{x' + x''}{2}$$

On verrait de même que l'on a :

$$y''' = \frac{y' + y''}{2}$$

Nous savons d'ailleurs que, dans une équation du second degré, la somme des racines est égale au coefficient du terme du premier degré changé de signe et divisé par le coefficient du terme du second degré. Développons donc les équations (7) et (8) ; nous avons :

$$x^2 (a + bm^2 + 2hm) + 2x (bmn + hn) + bn^2 + c = 0 \qquad (9)$$

$$y^2 \left(b + \frac{a}{m^2} + \frac{2h}{m}\right) - 2y \left(\frac{an}{m^2} + \frac{hn}{m}\right) + \frac{an^2}{m^2} + c = 0 \qquad (10)$$

l'équation (9) nous donne :

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{-(bmn + hn)}{a + bm^2 + 2hm} = n\,\frac{-(bm + h)}{a + bm^2 + 2hm} = x''' \qquad (11)$$

$$\frac{y' + y''}{2} = \frac{\frac{an}{m^2} + \frac{hn}{m}}{\frac{a}{m^2} + b + \frac{2h}{m}} = n\,\frac{\frac{a}{m^2} + \frac{h}{m}}{\frac{a}{m^2} + b + \frac{2h}{m}}$$
$$= n\,\frac{a + hm}{a + bm^2 + 2hm} = y''' \qquad (12)$$

En divisant membre à membre ces deux équations, il vient :

$$\frac{y''}{x''} = -\frac{a + hm}{bm + h} \tag{13}$$

Le point x'', y'', milieu de AB, se trouve donc sur la droite ayant pour équation :

$$\frac{y}{x} = -\frac{a + hm}{bm + h} \tag{14}$$

Cette droite, dont l'équation est indépendante de n et ne dépend que de quantités qui restent constantes pour une même direction de cordes telles que AB, est le lieu du point C quand AB se déplace parallèlement à MT. C'est donc le diamètre cherché.

Cette droite passe par l'origine, puisque son équation ne renferme pas de termes indépendants d'x et d'y. Je dis de plus qu'elle passe par le point M.

En effet, chassons le dénominateur de l'équation (5), il vient :

$$mhx_1 + mby_1 + ax_1 + hy_1 = x_1 (a + mh) + y_1 (bm + h) = 0$$

D'où on déduit :

$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{a + hm}{bm + h}$$

et l'on voit que le point x_1 y_1 se trouve sur la droite (14).

Donc le diamètre des cordes telles que AB parallèles à la tangente MT en M, est la droite oM joignant le centre o de la courbe au point M, ce qu'il fallait démontrer.

14. — Diamètres conjugués. — Nous pouvons déduire de ce qui précède la relation qui lie le coefficient angulaire m des cordes parallèles à une direction donnée, au coefficient angulaire du diamètre de ces cordes.

Désignons par m' ce coefficient angulaire ; m' est égal à la fraction qui forme le second membre de l'équation (14) du numéro précédent. On a :

$$m' = -\frac{a + hm}{bm + h}$$

ou, en chassant le dénominateur :

$$m'(bm + h) = -(a + hm)$$

Effectuons la multiplication indiquée et faisons passer tous les termes dans le premier membre ; il vient :

$$bmm' + h(m + m') + a = 0 \qquad (1)$$

Cette équation présente cette particularité qu'elle est *symétrique* par rapport à m et m', c'est-à-dire qu'elle ne change pas si on y remplace m par m' et m' et par m.

Cette circonstance entraîne une conséquence importante. Si nous nous proposons de trouver le coefficient angulaire m' du diamètre des cordes de coefficient angulaire m, m' nous est donné par l'équation (1) ci-dessus dans laquelle nous considérons m comme connu, m' comme inconnu.

Si maintenant nous nous proposons de trouver le coefficient angulaire m_1 du diamètre des cordes dont le coefficient angulaire est égal à m', pour trouver ce coefficient angulaire m_1 il faudra dans l'équation ci-dessus remplacer m par m' et m' par m_1, ce qui nous donne :

$$a + bm' m_1 + h(m' + m_1) = 0 \qquad (2)$$

Mais, l'équation (1) étant symétrique par rapport à m et m', l'équation (2) ne sera autre que l'équation (1) dans laquelle m est remplacé par m_1 ; m_1 est donc identique à m, et on voit que le diamètre des cordes de coefficient angulaire m', c'est-à-dire des cordes parallèles au diamètre oM, est une droite oM′ parallèle à M T (fig. 37).

Par conséquent, les deux diamètre oM, oM′ sont tels que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

On les nomme pour cette raison *diamètres conjugués*. Il résulte de ce qui précède qu'**une courbe du second degré à centre admet une infinité de systèmes de diamètres conjugués, tels que la tangente à la courbe à l'extémité de chacun d'entre eux est parallèle à l'autre**. Les coefficients angulaires de ces diamètre sont reliés par l'équation :

$$a + h(m + m') + bm\,m' = 0$$

15. — Equation d'une courbe du second degré à centre rapportée à deux diamètres conjugués. — Les deux diamètres pris pour axes se coupant au centre, l'équation de la courbe ne renferme pas de terme du premier degré ; elle est de la forme :

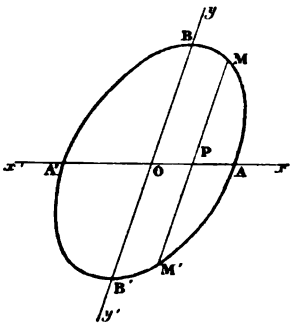

Fig. 39.

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + c = 0$$

En outre, si on considère une corde M M′ parallèle à l'axe des y, elle est coupée en deux parties égales par l'axe des x (fig. 39). On a donc :

$$MP = M'P$$

Les deux points M, M′, qui ont même abscisse o P, ont donc leurs ordonnées égales et de signes contraires.

Donc l'équation obtenue en changeant dans l'équation (1) y en $-y$, x conservant la même valeur, doit représenter la même courbe que l'équation (1). Cette équation est la suivante :

$$ax^2 + by^2 - 2hxy + c = 0 \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) représentant la même courbe, on doit avoir :

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{h}{-h} = \frac{c}{c}$$

Conditions qui se réduisent à :

$$\frac{h}{-h} = 1 \text{ ou } h = 0$$

L'équation (1) se réduit donc à :

$$ax^2 + by^2 + c = 0 \qquad (3)$$

16. — Signification des coefficients a, b, c. — Si dans cette équation nous faisons $y = 0$, il nous reste :

$$ax^2 + c = 0$$

équation du second degré en x, dont les racines égales et de signes contraires $\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ représentent les abscisses o A et o A′ des points de la courbe pour lesquels y est nul, c'est-à-dire des points A, A′, d'intersection de la courbe avec l'axe des x. En valeur absolue $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ est égal à la moitié du diamètre AA′. En faisant de même $x = 0$ dans l'équation (3) du n° précédent, on verrait que $\sqrt{-\frac{c}{b}}$ est égal à la moitié du diamètre B B′. Voyons dans quels cas ces deux radicaux vont avoir des valeurs réelles; nous pouvons toujours supposer c positif; s'il ne l'était pas, nous changerions tous les signes de l'équation de la courbe; l'équation ainsi obtenue représenterait évidemment la même courbe.

Trois cas peuvent se produire:

1° *a et b sont positifs*; h étant nul $\sqrt{h^2 - ab}$ est imaginaire. La courbe est une ellipse. Les deux radicaux $\sqrt{-\frac{a}{c}}$, $\sqrt{-\frac{c}{b}}$ sont imaginaires; la courbe ne coupe ni l'axe des x ni l'axe des y.

Il est aisé de voir que dans ce cas aucun point du plan ne peut satisfaire par ses coordonnées à l'équation de la courbe, car ax^2, by^2 et c étant toujours positifs, leur somme ne peut être nulle. Dans ce cas, on dit que la courbe est une ellipse *imaginaire*.

2° *a et b sont négatifs*; $h^2 - ab$ est alors négatif; la courbe est une ellipse; les deux radicaux $\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $\sqrt{-\frac{c}{b}}$ ont des valeurs réelles; désignons le premier par α, le second par β; les axes rencontrent la courbe aux points A, A′, B, B′ situés à des distances de l'origine o A $= \alpha$, o A′ $= -\alpha$, o B $= \beta$, o B′ $= -\beta$.

L'équation de la courbe peut d'ailleurs s'écrire:

$$ax^2 + by^2 = -c$$

ou, en divisant les deux termes par $-c$:

$$\frac{ax^2}{-c} + \frac{by^2}{-c} = 1$$

ou encore:

$$\frac{x^2}{\frac{-c}{a}} + \frac{y^2}{\frac{-c}{b}} = 1$$

ou enfin, en remplaçant $-\frac{c}{a}$, $-\frac{c}{b}$ par leurs valeurs α^2, β^2 :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

3° *a et b sont des signes contraires; $h^2 - ab$* est positif la courbe est une hyperbole. L'un des deux radicaux $\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $\sqrt{-\frac{c}{b}}$ est réel, l'autre imaginaire.

Supposons, pour fixer les idées, que a soit le coefficient négatif, b le coefficient positif. On voit que l'axe des x rencontre la courbe en deux points réels et que l'axe des y ne la rencontre pas. Posons :

$$\frac{-c}{a} = \alpha^2 \qquad \frac{-c}{b} = -\beta^2$$

L'équation de la courbe devient :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

α désigne la longeur du demi-diamètre o A.

17. — Diamètres de la parabole. — Ce que nous venons de dire dans les numéros qui précèdent ne se rapporte qu'aux courbes à centre : ellipse et hyperbole.

Nous allons rechercher si la parabole admet des diamètres et quels ils sont :

Nous savons que si l'équation générale :

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2ex + 2fy + c = 0$$

représente une parabole, on a $h^2 - ab = 0$. Dans ce cas, l'ensemble des termes du second degré :

$$ax^2 + by^2 + 2hxy$$

est le carré du polynome :

$$\sqrt{a}\, x + \sqrt{b}\, y$$

En effet, le carré de cette expression est :

$$ax^2 + by^2 + 2\sqrt{ab}\, xy = ax^2 + by^2 + 2hxy$$

D'ailleurs, si on pose l'équation :

$$\sqrt{a}\,x + \sqrt{b}\,y = 0$$

cette équation est, on l'a vu en commençant, l'équation du rayon infini unique mené de l'origine à la parabole.

Il résulte de ce qui précède que l'ensemble des termes du second degré dans la parabole est le carré du premier membre de l'équation du rayon infini mené de l'origine à cette courbe.

Pour simplifier l'étude de la parabole, nous supposerons que nous prenons pour axe des x le rayon infini mené de l'origine.

L'équation du rayon infini sera dès lors l'équation de l'axe des x :

$$y = 0$$

et les termes du second degré se réduiront au terme en y^2. Nous supposerons que le coefficient de ce terme est l'unité. Si cette condition n'était pas remplie, il suffirait pour la réaliser de diviser par le coefficient du terme en y^2 tous les termes de l'équation de la courbe.

Soit donc :

$$y^2 + 2\,ex + 2\,fy + c = 0 \qquad (1)$$

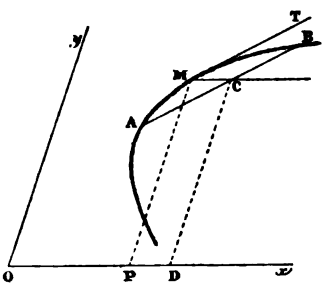

Fig. 40.

l'équation d'une parabole simplifiée, comme il vient d'être dit (fig. 40).

Cherchons le lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à la tangente en un point x, y.

Le coefficient angulaire m de la tangente en x_1 y_1, a pour expression :

$$m = -\frac{f'_x(x_1, y_1)}{f'_y(x_1, y_1)} = -\frac{2e}{2y_1 + 2f} = -\frac{e}{f + y_1} \qquad (2)$$

L'équation générale d'une corde AB, parallèle à la tangente MT, est :

$$y = mx + n$$

Remplaçons, dans l'équation de la courbe, x par $\frac{y}{m} - \frac{n}{m}$. Il vient :

$$y^2 + 2e\left(\frac{y}{m} - \frac{n}{m}\right) + 2fy + c = 0$$

ou :

$$y^2 + 2y\left(\frac{e}{m} + f\right) - \frac{2en}{m} + c = 0$$

Équation du second degré, dont les racines y', y'' sont les ordonnées des points A, B, d'intersection de la corde et de la courbe. Le milieu C de AB a pour ordonnée :

$$y'' = \frac{y' + y''}{2} = -\left(\frac{e}{m} + f\right)$$

Mais l'équation (2) donne :

$$mf + my_1 = -e$$

ou :

$$y_1 = -\left(\frac{e}{m} + f\right)$$

on voit donc qu'on a :

$$y'' = y_1$$

L'ordonnée C D du point C est donc égale à l'ordonnée MP du point M ; MC est parallèle à ox. Donc on voit que, si l'on mène d'un point quelconque M de la courbe une parallèle à ox, c'est-à-dire à la direction commune des rayons infinis, cette droite partage en deux parties égales les cordes parallèles à la tangente au point M.

Donc tous les diamètres de la parabole sont parallèles à la direction des rayons infinis, et divisent en parties égales les cordes parallèles aux tangentes à leurs extrémités.

18. — Équation d'une parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre. — L'axe des x étant un rayon infini, l'équation (1) du numéro précédent est applicable :

$$y^2 + 2ex + 2fy + c = 0 \qquad (1)$$

La courbe passant par l'origine, son équation doit être satisfaite si on y fait à la fois $x = 0$, $y = 0$. Ce qui donne :

$$c = 0$$

De plus l'axe des x coupant en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des y, l'équation ne doit pas contenir de terme du premier degré en y. On s'en assurerait par un raisonnement identique à celui fait plus haut pour déterminer l'équation d'une courbe à centre rapportée à deux diamètres conjugués. On a donc :

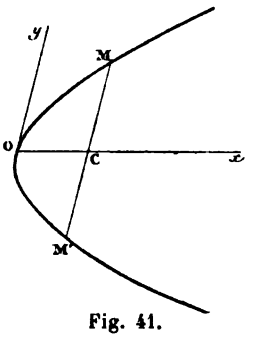

Fig. 41.

$$y^2 + 2\,ex = 0$$

et en posant :

$$e = -p$$

l'équation ci-dessus devient :

$$y^2 = 2\,px \qquad (2)$$

§ III. — AXES DES COURBES DU SECOND DEGRÉ

19. — Axes des courbes du second degré à centre. — On appelle *axe* d'une courbe un diamètre perpendiculaire à ses cordes.

Nous allons chercher si les courbes du second degré admettent des axes.

Occupons-nous d'abord des courbes à centre.

Si une courbe du second degré à centre (fig. 42) admet un axe AA′ divisant en parties égales les cordes telles que MM′, qui lui sont perpendiculaires, le diamètre BB′ conjugué de AA′ sera parallèle à MM′, c'est-à-dire perpendiculaire à AA′ et divisera en deux parties égales les cordes telles que M″M‴ parallèles à AA′ ; BB′ sera donc également un axe.

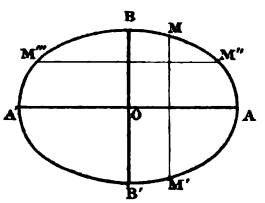

Fig. 42.

Donc, si une courbe du second degré à centre admet un axe, elle en admet deux, qui sont deux diamètres conjugués.

Ceci posé, soit une courbe du second degré à centre. Rapportons la à deux axes rectangulaires quelconques passant par son centre ; son équation générale sera (voir n° 10) :

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + c = 0 \qquad (1)$$

Soient m, m' les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués quelconques ; m et m' son liés par la relation (voir n° 14) :

$$a + bmm' + h(m + m') = 0 \qquad (2)$$

Cette équation (2) peut être satisfaite par une infinité de systèmes de valeurs données simultanément à m et m'. Cherchons si parmi ces systèmes il y en a un qui soit tel que les droites de coefficients angulaires m et m' soient perpendiculaires l'une sur l'autre. Pour qu'il en soit ainsi, il faut (voir Ire partie n° 72, remarque II) que l'on ait :

$$1 + m\,m' = 0$$

$$m' = -\frac{1}{m}$$

Remplaçons dans l'équation (2) m' par $-\frac{1}{m}$; il vient :

$$a - \frac{bm}{m} + h\left(m - \frac{1}{m}\right) = 0$$

ou, en multipliant par m :

$$am - bm + h(m^2 - 1) = 0$$

et, en ordonnant par rapport à m :

$$hm^2 - (b - a)\,m - h = 0 \qquad (3)$$

D'où :

$$m = \frac{b - a \pm \sqrt{(b-a)^2 + 4h^2}}{2h}$$

Les deux valeurs de m ainsi trouvées sont toujours réelles, la quantité sous le radical étant la somme de deux carrés toujours positifs.

De plus le produit des deux racines est égal à $-\frac{h}{h}$ c'est-à-dire à -1. Donc si m_1 et m_2 désignent les deux racines, la valeur de $m' = -\frac{1}{m}$, correspondant à $m = m_1$, sera m_2, et inversement la valeur de m', correspondant à $m = m_2$, sera m_1.

En d'autres termes, les racines de l'équation (3) sont égales aux valeurs de m et m', coefficients angulaires des deux axes conjugués.

Donc, **une courbe du second degré à centre admet toujours un système unique de deux axes conjugués.**

20. — Équation d'une courbe du second degré à centre rapportée à ses axes. — Cette équation sera la même que celle d'une courbe du second degré à centre rapportée à deux diamètres conjugués :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pour l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pour l'hyperbole.

a et b représentent pour l'ellipse les longueurs des demi-axes o A, o B.

Dans le cas de l'hyperbole, a est le *demi-axe réel*, b le *demi-axe imaginaire*.

21. — Variation de la longueur d'un demi-diamètre pour les courbes à centre.

1° *Ellipse*. Soit une ellipse rapportée à ses axes (fig. 43) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Nous supposerons pour fixer les idées que l'on a :

$$a > b$$

Menons, à partir du centre o de l'ellipse, une droite o M faisant avec l'axe o A un angle égal à α. Soit M le point ou cette droite rencontre l'ellipse. Désignons par x_1, y_1, les coordonnées du point M, par r la distance o M.

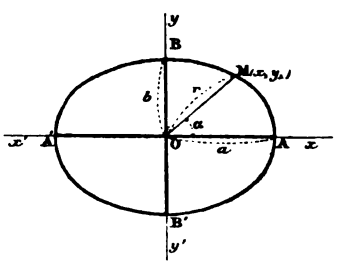

Fig. 43.

Nous nous proposons d'étudier la variation de r quand la droite o M tourne autour du point o.

L'ellipse étant symétrique par rapport à ses axes A A', B B', il

nous suffira d'examiner comment varie r quand la droite o M tourne dans l'angle A o B, c'est-à-dire quand α varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Évaluons r en fonction de α. Nous avons :

$$x_1 = r \cos \alpha \qquad y_1 = r \sin \alpha \tag{2}$$

Le point x_1, y_1 se trouvant sur l'ellipse, nous pouvons dans l'équation (1) de cette courbe remplacer x et y par x_1 et y_1, c'est-à-dire par $r \cos \alpha$ et par $r \sin \alpha$, ce qui nous donne :

$$r^2 \left[\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}\right] = 1$$

ou, en chassant les dénominateurs :

$$r^2 (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) = a^2 b^2$$

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \tag{3}$$

L'équation (3) nous montre que r^2 est toujours positif, et par suite r toujours réel. Les valeurs de x_1 et de y_1 données par l'équation (2) sont donc toujours réelles. En d'autres termes, une droite quelconque o M, menée du centre o de l'ellipse, rencontre toujours cette courbe.

Pour étudier la variation de la grandeur du rayon r, ou, ce qui revient au même, de son carré r^2, quand α varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, calculons la dérivée de r^2 par rapport à α. Nous avons (Voir Ire partie, n° 32, dérivée d'une fraction) :

$$\frac{d(r^2)}{d\alpha} = \frac{-a^2 b^2 \dfrac{d(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)}{d\alpha}}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^2}.$$

$$= \frac{-a^2 b^2 \left(2a^2 \sin \alpha \dfrac{d(\sin \alpha)}{d\alpha} + 2b^2 \cos \alpha \dfrac{d(\cos \alpha)}{d\alpha}\right)}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^2}$$

$$\frac{d(r^2)}{d\alpha} = \frac{-a^2 b^2 (2a^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2b^2 \cos \alpha \sin \alpha)}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^2} = \frac{-2 \sin \alpha \cos \alpha\, a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^2}$$

$$= \frac{-a^2 b^2 (a^2 - b^2) \sin 2\alpha}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^2} \tag{4}$$

a étant plus grand que b par hypothèse, la quantité :

$$\frac{-a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^2}$$

est toujours négative, la dérivée $\frac{d(r^2)}{d\alpha}$ est donc toujours de signe contraire à $\sin 2\alpha$, et par suite négative quand α varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$; elle s'annule pour $2\alpha = 0$, et pour $2\alpha = \pi$, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Si on donne à α une valeur un peu inférieure à 0, $\sin 2\alpha$ est négatif, $\frac{d(r^2)}{d\alpha}$ est positif. Donc quand α varie en passant d'une valeur négative très petite à une valeur positive très petite, $\frac{d(r^2)}{d\alpha}$ s'annule en passant d'une valeur positive à une valeur négative ; r^2 cesse de croître pour décroître ; donc pour $\alpha = 0$, r^2, passe par un maximun, qui est égal à a^2.

α croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\frac{d(r^2)}{d\alpha}$ est négatif ; r^2, et par suite r, décroît ; pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin 2\alpha = 0$, r^2 passe par un minimum qui est égal à b^2.

Donc quand la droite o M tourne autour du point o, de la position o A à la position o B, le rayon o M diminue d'une manière continue depuis le demi-grand axe o A, jusqu'au demi-petit axe o B ; puis, en raison de la symétrie, il reprend les mêmes valeurs quand la droite o M continue à tourner de o B en o A′, puis en o B, pour revenir enfin en o A.

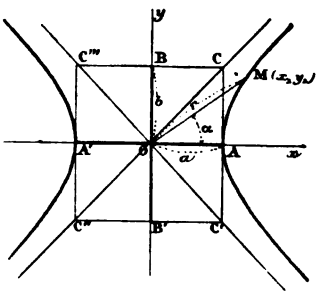

Fig. 44.

2° *Hyperbole*. Soit (fig. 44) une hyperbole rapportée à ses axes :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

Menons, comme dans le cas de l'ellipse, la droite o M, faisant un angle α avec o A ; désignons par x_1, y_1, les coordonnées du point M ou cette droite rencontre l'hyperbole, et par r la distance o M. Nous avons :

$$x_1 = r \cos \alpha \qquad y_1 = r \sin \alpha \qquad (6)$$

Les équations (5) et (6) ne diffèrent des équations (1) et (2) qu'en ce que b^2 est remplacé par $-b^2$. Nous obtiendrons donc les valeurs de r^2 et de $\frac{d(r^2)}{d\alpha}$ en remplaçant b^2 par $-b^2$ dans les équations (3) et (4). Nous aurons ainsi :

$$r^2 = \frac{-a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha} = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha} \tag{7}$$

$$\frac{d(r)^2}{d\alpha} = \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2) \sin 2\alpha}{(a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha)^2} \tag{8}$$

L'équation (7) nous montre que pour que r^2 soit positif, c'est-à-dire pour que r soit réel, il faut que l'on ait :

$$b^2 \cos^2 \alpha > a^2 \sin^2 \alpha$$

ou :

$$tg^2 \alpha < \frac{b^2}{a_2} \tag{9}$$

Portons sur oy une longueur $oB = b$; par les points A et B, menons des parallèles à oy et à ox; soit C leur intersection. Menons la droite Co; l'angle CoA a pour tangente $\frac{b}{a}$; si α varie de 0 à CoA, l'inégalité (9) est satisfaite, r est réel, et il en est de même de x_1 et de y_1; donc la droite oM rencontre l'hyperbole quand elle tourne autour du point o, de la position oA à la position oC. Si α est compris entre CoA et $\frac{\pi}{2}$, on a $tg^2 \alpha > \frac{b^2}{a_2}$, r^2 est négatif, r est imaginaire ; il en est de même de x_1 et de y_1. Donc la droite oM ne rencontre pas la courbe quand elle se déplace de la position oC à la position oB. Il n'y a pas de points réels de l'hyperbole dans l'angle CoB.

On voit donc, en raison de la symétrie de la courbe par rapport à ses axes, qu'elle se compose de deux branches situées dans les angles CoC′, C″oC‴, et que les angles CoC‴, C″oC′ ne renferment aucun point réel de l'hyperbole : pour $tg\,\alpha = \pm \frac{b}{a}$, r^2 est infini; donc les droites oC, oC′, oC″, oC‴ sont des rayons infinis, ce que nous savions d'ailleurs, car les équations des rayons infinis menés de l'origine sont, nous l'avons vu, obtenues en égalant à

zéro l'ensemble des termes du second degré dans l'équation (5) de l'hyperbole, ce qui nous donne :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

ou

$$\left(\frac{y}{x} - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{b}{a}\right) = 0 \qquad (10)$$

La droite $\frac{y}{x} - \frac{b}{a} = 0$ est la droite C o C″, la droite $\frac{y}{x} + \frac{b}{a} = 0$ est la droite C′ o C‴.

Si maintenant nous examinons la valeur de $\frac{d(r^2)}{d\alpha}$, nous voyons que le signe de cette dérivée est le même que le signe de $\sin 2\alpha$; donc quand α est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, $\frac{d(r^2)}{d\alpha}$ est positif ; r augmente constamment de la valeur a à la valeur $+\infty$, quand o M varie entre o A et o C.

Ces diverses propriétés donnent une idée assez exacte de la forme de la courbe.

22. — Axe de la parabole. — Nous avons vu que dans la parabole, toute parallèle à la direction des rayons infinis menée par un point de la courbe était un diamètre pour les cordes parallèles à la tangente au point considéré. Donc si la parabole admet un axe, c'est-à-dire un diamètre perpendiculaire à ses cordes, il faudra nécessairement que cet axe soit parallèle à la direction du rayon infini et que de plus la tangente au point où il coupe la parabole soit perpendiculaire à cette même direction.

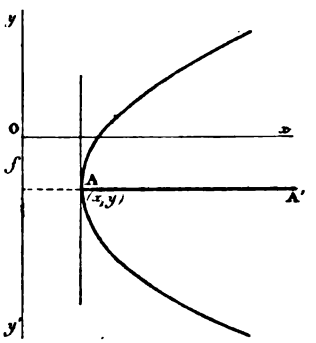

Fig. 45.

Cherchons donc s'il existe sur la parabole un point où la tangente est perpendiculaire à la direction des rayons infinis. Si un tel point existe, le diamètre qui passe par ce point sera un axe.

Rapportons la courbe à deux axes rectangulaires dont l'un,

l'axe des x, est parallèle à la direction des rayons infinis (fig. 45). L'équation de la courbe sera (voir n° 17) :

$$y^2 + 2ex + 2fy + c = 0$$

Le coefficient angulaire de la tangente en un point A (x_1, y_1) est (voir n° 17) :

$$m = -\frac{e}{f + y_1}$$

Pour que cette tangente soit perpendiculaire aux rayons infinis, c'est-à-dire à ox, il faut que l'on ait :

$$m = tg\,\frac{\pi}{2} = \infty$$

Pour que m soit infiniment grand, il faut que son dénominateur s'annule, ce qui nous donne :

$$f + y_1 = 0$$
$$y_1 = -f$$

La tangente au point A dont l'ordonnée est égale à $-f$ est donc parallèle à oy, et par suite le diamètre A A′ parallèle à ox est perpendiculaire à ses cordes. C'est donc un axe.

Donc la parabole admet un axe. Le point A où il coupe la courbe s'appelle *sommet*.

23. — Équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet. — Cette équation sera la même que celle de la parabole rapportée à un diamètre quelconque et à la tangente au point où ce diamètre rencontre la courbe (voir n° 78) :

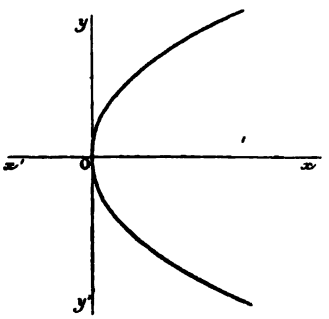

Fig. 46.

$$y^2 = 2px$$

Seulement, dans ce cas, les axes des coordonnées sont rectangulaires.

Il est facile de se rendre compte de la forme de la courbe définie par cette équation.

Supposons p positif ; si x est négatif, y est imaginaire. La courbe n'a donc pas de points à gauche de l'axe des y; si x est positif, à chaque valeur de x correspondent deux valeurs réelles de y égales et de signes contraires $\pm\sqrt{2px}$; de plus cette valeur augmente quand x augmente. La courbe se compose donc de deux branches infinies, tangentes en o à l'axe des y, et symétriques par rapport à l'axe des x.

§ IV. — ASYMPTOTES DES COURBES DU SECOND DEGRÉ

24. — Nous avons vu au n° 3 que l'asymptote d'une courbe était une tangente à cette courbe en un point situé à l'infini. Nous allons nous appuyer sur cette propriété pour déterminer les asymptotes des courbes du second degré.

25. — Hyperbole. — Rapportons la courbe à ses axes (fig. 44). Soit :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

son équation.

Cherchons l'équation de la tangente en un point quelconque x_1, y_1 :

$$(x - x_1) f'_{x_1}(x_1, y_1) + (y - y_1) f'_{y_1}(x_1, y_1) = 0 \qquad (2)$$

Nous avons :

$$f'_{x_1}(x_1, y_1) = \frac{2x_1}{a_2}$$

$$f'_{y_1}(x_1, y_1) = -\frac{2y_1}{b^2}$$

ce qui nous donne pour équation de la tangente, en remplaçant $f'_{x_1}(x_1, y_1)$, $f'_{y_1}(x_1, y_1)$ par leurs valeurs et en divisant par 2 :

$$(x - x_1)\frac{x_1}{a^2} - (y - y_1)\frac{y_1}{b^2} = 0$$

Developpons et ordonnons ; il vient :

$$\frac{x\,x_1}{a^2} - \frac{y\,y_1}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 0 \qquad (3)$$

Le point x_1, y_1 se trouvant sur l'hyperbole, on a :

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

et l'équation (3) peut s'écrire :

$$\frac{x\,x_1}{a^2} - \frac{y\,y_1}{b^2} - 1 = 0$$

ou, en faisant passer $\frac{yy_1}{b_2}$ dans le second membre, et en divisant les deux membres par $\frac{b^2}{y_1}$:

$$y = x\,\frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1} - \frac{b^2}{y_1} \qquad (4)$$

Telle est l'équation de la tangente au point x_1 y_1. Si on suppose que x_1 et y_1 augmentent indéfiniment, on voit que le terme indépendant d'x et d'y dans l'équation (4), $\frac{b^2}{y_1}$, tend vers zéro ; or, on sait que, quand l'équation d'une droite ne renferme pas de terme indépendant de x et de y, cette droite ou cette courbe passe par l'origine, puisque $x = 0$, $y = 0$ satisfont à son équation. Donc, quand le point x_1, y_1 s'éloigne indéfiniment sur l'hyperbole, la tangente en ce point, à la limite, passe par l'origine. Donc enfin cette tangente, qui est l'asymptote, est le rayon infini mené de l'origine, c'est-à-dire du centre de l'hyperbole.

Nous avons vu, au n° 21, que les rayons infinis menés du centre de l'hyperbole aux branches de cette courbe étaient les droites o CC″, o C′ C‴ ayant pour équations

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \qquad \frac{y}{x} = -\frac{b}{a}$$

ces droites sont donc les asymptotes de l'hyperbole. Ce sont les diagonales d'un rectangle concentrique à l'hyperbole et dont les côtés, parallèles aux axes de la courbe, ont pour longueurs $2a$ et $2b$.

26. — Parabole. — Rapportons la courbe à son axe et à la tangente au sommet ; son équation sera :

$$y^2 = 2px \text{ ou } y^2 - 2px = 0$$

Cherchons la tangente en un point $x_1\, y_1$:

$$(x - x_1)\, f'_{x_1}(x_1, y_1) + (y - y_1)\, f'_{y_1}(x_1, y_1) = 0$$

Nous avons :

$$f'_{x_1}(x_1, y_1) = -2p$$
$$f'_{y_1}(x_1, y_1) = 2y_1$$

Remplaçons dans l'équation (2) $f'_{x_1}(x_1\, y_1)$, $f'_{y_1}(x_1, y_1)$, par leurs valeurs.

Nous avons :

$$-2p\,(x - x_1) + 2y_1\,(y - y_1) = 0$$

ou :

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

Telle est l'équation de la tangente au point x_1, y_1.

Cherchons la distance o T $= y_2$ de l'origine au point où cette tangente rencontre l'axe des y. Le point T étant sur la droite représentée par l'équation (3), ses coordonnées $x = 0$, $y = y_2$ doivent satisfaire à cette équation, et l'on a :

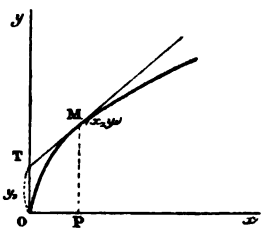

Fig. 47.

$$y_2 - y_1 = -\frac{p}{y_1}\, x_1$$

ou :

$$y_2 = y_1 - \frac{p}{y_1}\, x_1 = \frac{y_1^2 - px_1}{y_1} \qquad (4)$$

mais le point x_1, y_1, étant sur la parabole on a :

$$y_1^2 = 2px_1$$

et par suite :

$$px_1 = \frac{y_1^2}{2}$$

Remplaçons dans l'équation (4) px_1 par cette expression; nous avons :

$$y_2 = \frac{y_1^2 - \frac{y_1^2}{2}}{y_1} = \frac{y_1}{2}$$

on voit que, quand y_1 augmente indéfiniment, il en est de même de y_2, et par suite les asymptotes de la parabole sont des parallèles à ox mené par un point situé à l'infini sur oy. Elles sont donc tout entières situées à l'infini.

En d'autres termes, la parabole n'admet pas d'asymptote à distance finie.

27. — Remarque. — L'équation (5) du numéro précédent met en évidence une propriété remarquable de la parabole. Si on mène la tangente en un point quelconque M et si on la prolonge jusqu'à son intersection T avec la tangente au sommet o, la longueur o T est égale à la moitié de la perpendiculaire MP abaissée du point M sur l'axe de la parabole (fig. 48).

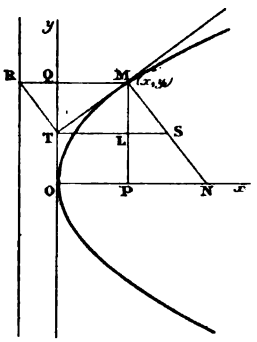

Fig. 48.

De cette propriété nous allons en déduire deux autres, également intéressantes.

Menons TL parallèle à ox et rencontrant en L la droite M P. On a :

$$oT = LP = \frac{MP}{2}$$

et par suite :

$$ML = \frac{MP}{2} = \frac{y_1}{2}$$

D'ailleurs le triangle rectangle MTL donne :

$$\overline{MT}^2 = \overline{TL}^2 + \overline{ML}^2 = \overline{oP}^2 + \overline{ML}^2 = x_1^2 + \frac{y_1^2}{4}$$

et comme on a :

$$y_1^2 = 2px_1$$

$$\overline{MT}^2 = x_1^2 + \frac{px_1}{2} = x_1\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)$$

MT est donc moyenne proportionnelle entre x_1 et $\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)$.

Menons MR parallèle à ox et tel que QR $= \frac{p}{2}$; MQ est égal à x_1 ;

MR est donc égal à $x_1 + \frac{p}{2}$. Le triangle MTR dans lequel le côté MT est moyenne proportionnelle entre le côté MR et sa projection MQ sur ce côté est rectangle en T.

Donc, si on mène à une parabole une tangente MT rencontrant en T la tangente au sommet, la perpendiculaire TR élevée du point T sur MT et la parallèle MR menée du point M à l'axe de la parabole, se coupent en un point R situé sur une perpendiculaire à l'axe distante de la tangente au sommet d'une longueur égale à $\frac{p}{2}$.

Menons maintenant la normale MN perpendiculaire en M à la tangente MT. Soit N le point où cette droite rencontre l'axe ox. Prolongeons LT jusqu'à sa rencontre en S avec MN.

Les deux triangles TQR, MLS sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires et un côté égal TQ = ML; donc LS = QR $= \frac{p}{2}$ et par suite PN, égal au double de LS, le point L étant le milieu de MP, est constant et égal à p.

La longueur PN projection de la normale sur l'axe s'appelle la *sous-normale*, la longueur p s'appelle le *paramètre* de la parabole. On arrive donc à cette conclusion intéressante : **Dans la parabole la sous-normale est constante et égale au paramètre.**

CHAPITRE III

FOYERS ET DIRECTRICES

§ I. — Une courbe du second degré est le lieu géométrique des points tels que le rapport de leurs distances à un point fixe et à une droite fixe, est constant. — Distance de deux points. — Distance d'un point à une droite. — Démonstration de la proposition énoncée. — Foyers et directrices.

§ II. — Recherche des foyers et directrices. — Ellipse. — Hyperbole. — Parabole.

§ I. — Une courbe du second degré est le lieu géométrique des points tels que le rapport des distances de chacun d'eux a un point fixe et a une droite fixe, est égal a un nombre constant.

28. — Expression de la distance de deux points en coordonnées rectangulaires. — Soient M et A deux points dont les coordonnées sont x et y, pour le point M, α et β pour le point A (fig. 49). Menons MA et AR, parallèle à ox coupant en R l'ordonnée MP du point M; on a dans le triangle rectangle MAR :

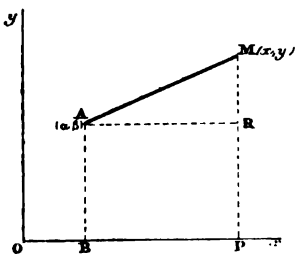

Fig. 49.

$$\overline{MA}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{MR}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{MR}^2 = \overline{(oP - oB)}^2 + \overline{(MP - AB)}^2$$

ou :

$$\overline{MA}^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$

Le carré de la distance d'un point à un autre est donc égal à la somme des carrés des différences des coordonnées des deux points.

29. — Distance d'un point à une droite. — Soient α et β les coordonnées d'un point M;

$$lx + my + n = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une droite AB (fig. 50).

Du point M, nous abaissons MC perpendiculaire sur AB. Soit C le pied de cette perpendiculaire. Nous nous proposons de trouver l'expression de la longueur MC.

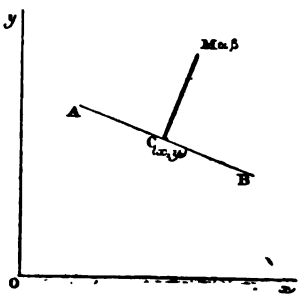

Fig. 50.

Cherchons d'abord les coordonnées x_1 y_1 du point C.

Pour y arriver, déterminons l'équation de la droite MC. Nous connaissons un point (α, β) de cette droite. Cherchons son coefficient angulaire.

Nous avons vu (Ire partie, n° 72) que quand deux droites étaient perpendiculaires (les axes des coordonnées étant rectangulaires) le produit de leurs coefficients angulaires était égal à — 1.

Le coefficient angulaire de la droite AB est le coefficient de x dans l'équation de cette droite résolue par rapport à y :

$$y = -\frac{l}{m}x - \frac{n}{m} \tag{2}$$

Le coefficient angulaire μ de AB est donc égal à $-\frac{l}{m}$; par suite le coefficient angulaire μ' de MC aura pour valeur :

$$\mu' = \frac{-1}{\mu} = \frac{m}{l}$$

Et par suite, l'équation de la droite MC qui passe par le point (α, β,) et dont le coefficient angulaire est égal à $\frac{m}{l}$, est la suivante :

$$y - \beta = \frac{m}{l}(x - \alpha)$$

ou :

$$mx - ly - m\alpha + l\beta = 0 \tag{3}$$

Les coordonnées x_1, y_1 du point C, qui se trouve à la fois sur les

droites (1) et (3), satisfont aux équations de ces deux droites. Nous avons donc :

$$lx_1 + my_1 + n = 0 \tag{4}$$

$$mx_1 - ly_1 - m\alpha + l\beta = 0 \tag{5}$$

x_1 et y_1 sont déterminés par deux équations du premier degré à deux inconnues; leurs valeurs sont les suivantes :

$$x_1 = \frac{-ln + m^2\alpha - lm\beta}{l^2 + m^2}$$

$$y_1 = \frac{-mn - lm\alpha + l^2\beta}{l^2 + m^2}$$

La distance MC, dont nous cherchons l'expression, aura alors pour carré :

$$\overline{MC}^2 = (\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2$$

on a d'ailleurs :

$$(\alpha - x_1) = \alpha - \frac{-ln + m^2\alpha - lm\beta}{l^2 + m^2} = \frac{\alpha l^2 + \alpha m^2 + ln - m^2\alpha + lm\beta}{l^2 + m^2}$$

$$= l\,\frac{\alpha l + \beta m + n}{l^2 + m^2}$$

$$(\beta - y_1) = \beta - \frac{-mn - lm\alpha + l^2\beta}{l^2 + m^2} = \frac{\beta l^2 + \beta m^2 + mn + lm\alpha - l^2\beta}{l^2 + m^2}$$

$$= m\,\frac{\alpha l + \beta m + n}{l^2 + m^2}$$

D'où on déduit :

$$\overline{MC}^2 = (\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2 = (l^2 + m^2)\,\frac{(\alpha l + \beta m + n)^2}{(l^2 + m^2)^2} = \frac{(\alpha l + \beta m + n)^2}{l^2 + m^2}$$

Et enfin :

$$MC = \frac{\alpha l + \beta m + n}{\pm\sqrt{l^2 + m^2}}$$

Le radical est pris soit avec le signe + soit avec le signe —, de manière que la valeur de MC soit positive.

Donc pour avoir la distance d'un point à une droite, il faut remplacer dans l'équation de la droite, x et y par les coordonnées α et β du point, et diviser le résultat ainsi obtenu par la racine carrée de la somme des carrés des coefficients d'x et d'y dans l'équation de la droite.

Le résultat de cette division représente en valeur absolue la distance cherchée.

30. — Ceci posé, nous allons démontrer que **le lieu géométrique des points, tels que les distances de chacun d'eux à un point fixe et à une droite fixe sont dans un rapport constant, est une courbe du second degré.**

Soit x et y les coordonnées d'un point de la courbe cherchée, α et β les coordonnées du point fixe, $lx + my + 1 = 0$ l'équation de la droite fixe, k le rapport constant.

La distance du point (x,y) au point (α,β) a pour expression (voir n° 28) :

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

la distance du point (x,y) à la droite $lx + my + 1 = 0$ est :

$$\frac{lx + my + 1}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

Ces deux distances sont dans un rapport constant égal à k. On a donc :

$$\frac{lx + my + 1}{\sqrt{l^2 + m^2}} = k\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

Elevons au carré les deux membres de cette égalité pour chasser les radicaux; il vient :

$$k^2\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right] = \frac{(lx + my + 1)^2}{l^2 + m^2} \qquad (1)$$

Telle est l'équation de la courbe cherchée.

Cette équation est du second degré en x et en y. Elle représente donc une courbe du second degré.

Donc, le lieu géométrique cherché est une courbe du second degré.

31. — Inversement nous allons faire voir que **toute courbe du second degré est telle que le rapport des distances de chacun de ses points à une certaine droite fixe et à un certain point fixe est égal à un nombre constant.**

En effet, soit une courbe du second degré quelconque, dont on nous donne l'équation :

$$ax^2 + by^2 + 2\,hxy + 2\,ex + 2\,fy + c = 0 \qquad (2)$$

Nous savons que le lieu géométrique des points tels que le rapport de leur distance à la droite $lx + my + 1 = 0$ et au point (α, β) est égal à k, est une certaine courbe du second degré, dont l'équation est l'équation (1) du n° précédent.

Cherchons s'il est possible de déterminer les coefficients l, m, de l'équation de la droite, les coordonnées α, β, du point et le nombre k, de manière que la courbe (1) se confonde avec la courbe (2).

Si les équations (1) et (2) représentent la même courbe, ces deux équations doivent avoir les coefficients des termes semblables proportionnels (voir n° 9).

Développons l'équation (1). Elle prendra la forme :

$$Ax^2 + By^2 + 2\,Hxy + 2\,Ex + 2\,Fy + C = 0 \qquad (3)$$

A, B, H, E, F, C, désignant certaines fonctions connues de l m, α, β, k. Pour exprimer que les courbes (1) et (3) sont identiques, écrivons que leurs équations ont leurs termes semblables proportionnels; nous aurons :

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{H}{h} = \frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{C}{c}$$

Nous avons ainsi cinq équations, reliant les cinq quantités m, l, α, β, k aux coefficients a, b, h, e, f, c de l'équation de la courbe donnée. Or on sait que cinq équations entre cinq inconnues permettent de déterminer les valeurs de ces cinq inconnues. Donc on pourra, en résolvant ces cinq équations, trouver les valeurs m, l, α, β, k, en fonction de a, b, h, e, f, c. La droite ayant pour équation $lx + my + 1 = 0$, le point ayant α, β, pour coordonnées et le nombre k, ainsi déterminés, seront tels que, si on cherche le lieu géométrique des points pour lesquels le rapport des distances de chacun d'eux au point (α, β) et à la droite $lx + my + 1 = 0$ soit égal à k, on trouvera pour équation de ce lieu géométrique l'équation (3), laquelle représente la même courbe que l'équation (2) donnée.

Par suite la courbe donnée satisfait bien à la condition énoncée.

Toute courbe du second degré est donc telle qu'il existe au moins un point et une droite satisfaisant à cette condition.

Le point s'appele un *foyer* de la courbe, et la droite une *directrice*.

§. II. — RECHERCHE DES FOYERS ET DIRECTRICES

32. — Foyers et Directrices de l'Ellipse. — Soit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipse, rapportée à ses axes.

Désignons par :

$$lx + my + 1 = 0$$

l'équation d'une directrice; par α, β les coordonnées du foyer correspondant, par k le rapport constant des distances de chaque point de l'ellipse au foyer et à la directrice.

Nous nous proposons de déterminer m, n, α, β et k.

Nous savons que l'équation de l'ellipse doit être identique à l'équation (1) du n° 30 :

$$k^2 [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] = \frac{(lx + my + 1)^2}{l^2 + m^2}$$

Développons cette équation, il vient :

$$k^2 (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2)(l^2 + m^2) = l^2 x^2 + m^2 y^2 + 2 lmxy + 2 lx + 2 my + 1$$

Faisons passer tous les termes dans le premier membre, et ordonnons ; il vient :

$$x^2 [k^2 (l^2 + m^2) - l^2] + y^2 [k^2 (l^2 + m^2) - m^2] - 2 lmxy - 2x [\alpha k^2 (l^2 + m^2) + l] - 2y [\beta k^2 (l^2 + m^2) + m] + k^2 (l^2 + m^2)(\alpha^2 + \beta^2) - 1 = 0 \qquad (2)$$

Ecrivons que cette courbe (2) est identique à l'ellipse donnée, c'est-à-dire que les coefficients des termes semblables dans les

équations (1) et (2) sont porportionnels, en remarquant d'ailleurs que l'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{3}$$

Nous avons :

$$\frac{k^2(l^2+m^2)-l^2}{\frac{1}{a^2}} = \frac{k^2(l^2+m^2)-m^2}{\frac{1}{b^2}} = \frac{-2\,lm}{0} = \frac{-2(\alpha k^2(l^2+m^2)+l)}{0}$$

$$= \frac{-2(\beta k^2(l^2+m^2)+m)}{0} = \frac{k^2(l^2+m^2)(\alpha^2+\beta^2)-1}{-1}$$

Les numérateurs des fractions dont le dénominateur est nul doivent être nuls. On a donc les cinq équations suivantes :

$$l\,m = 0 \tag{4}$$

$$\alpha\,k^2(l^2+m^2)+l = 0 \tag{5}$$

$$\beta\,k^2(l^2+m^2)+m = 0 \tag{6}$$

$$\frac{k^2(l^2+m^2)-l^2}{\frac{1}{a^2}} = \frac{k^2(l^2+m^2)-m^2}{\frac{1}{b^2}}$$

ou

$$a^2k^2(l^2+m^2)-a^2l^2 = b^2k^2(l^2+m^2)-b^2m^2 \tag{7}$$

$$\frac{k^2(l^2+m^2)-m^2}{\frac{1}{b^2}} = \frac{k^2(l^2+m^2)(\alpha^2+\beta^2)-1}{-1}$$

ou

$$b^2k^2(l^2+m^2)-b^2m^2 = 1-k^2(l^2+m^2)(\alpha^2+\beta^2) \tag{8}$$

L'équation (4) est satisfaite par $l=0$ ou $m=0$. Voyons d'abord à laquelle de ces deux solutions nous devons nous arrêter.

L'équation (7) peut s'écrire :

$$k^2(l^2+m^2)(a^2-b^2) = a^2l^2-b^2m^2 \tag{9}$$

Le premier membre est positif si a est plus grand que b. Dans ce cas, $l=0$ rendrait le second membre négatif, ce qui serait impossible. Donc, si nous supposons $a>b$, il faut admettre la solution $m=0$.

Si au contraire nous avons $a<b$, le premier membre de l'équation (9) est négatif ; il faut alors admettre la solution $l=0$.

Supposons pour fixer les idées que a soit le demi-grand axe de l'ellipse. Dans ce cas on doit prendre $m = 0$.

Si dans l'équation (9) nous faisons $m = 0$, il vient :

$$k^2 l^2 (a^2 - b^2) = a^2 l^2$$

et en divisant par l^2 :

$$k^2 (a^2 - b^2) = a^2$$

d'où :

$$k^2 = \frac{a^2}{a^2 - b^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

en posant :

$$c^2 = a^2 - b^2$$

on a donc, dans ce cas :

$$k = \pm \frac{a}{c} \tag{10}$$

k, désignant le rapport de deux longueurs, est un nombre positif; il faut donc prendre le signe $+$.

Si d'ailleurs nous faisons dans (6) $m = 0$, nous avons :

$$\beta k^2 l^2 = 0$$

k n'est pas nul, l non plus, sans quoi l'équation de la droite se réduirait à $1 = 0$ ce qui est absurde. Il faut donc prendre :

$$\beta = 0 \tag{11}$$

Faisons dans les équations (5) et (8) : $m = 0$, $\beta = 0$, $k^2 = \frac{a^2}{c^2}$; ces deux équations deviennent respectivement :

$$\alpha l^2 \frac{a^2}{c^2} + l = 0 \text{ ou } \frac{\alpha a^2 l}{c^2} = -1 \text{ ou enfin } \alpha = -\frac{c^2}{a^2 l} \tag{12}$$

et :

$$b^2 l^2 \frac{a^2}{c^2} = 1 - \alpha^2 l^2 \frac{a^2}{c^2} \text{ ou } a^2 b^2 l^2 = c^2 - a^2 \alpha^2 l^2 \tag{13}$$

Remplaçons dans (13) α par sa valeur tirée de (12) il vient :

$$a^2 b^2 l^2 = c^2 - \frac{a^2 l^2 c^4}{a^4 l^2} = c^2 - \frac{c^4}{a^2} = \frac{a^2 c^2 - c^4}{a^2} = \frac{c^2 (a^2 - c^2)}{a^2} = \frac{c^2 b^2}{a^2} \tag{14}$$

ou :

$$a^2 l^2 = \frac{c^2}{a^2} \tag{15}$$

d'où on tire :

$$l^2 = \frac{c^2}{a^4}$$

$$l = \pm \frac{c}{a^2} \tag{16}$$

Remplaçons dans l'équation (12) l par sa valeur donnée par l'équation (16), nous avons :

$$\alpha = -\frac{c^2}{a^2 \times \left(\pm \frac{c}{a^2}\right)} = \mp c \tag{17}$$

Il faut, on le voit, prendre le signe — devant la valeur de α quand on prend le signe + devant la valeur de l et inversement.

Donc, en résumé, nous trouvons deux solutions de la question suivant qu'on prend devant la valeur de l le signe + ou le signe —.

1° Le foyer a pour coordonnées $\beta = 0$, $\alpha = +c$, la directrice a pour équation $\frac{-cx}{a^2} + 1 = 0$ ou $x = +\frac{a^2}{c}$

2° Le foyer a pour coordonnées $\beta = 0$, $\alpha = -c$ la directrice a pour équation $\frac{cx}{a^2} + 1 = 0$ ou $x = -\frac{a^2}{c}$

Dans les deux cas le rapport k a pour valeur $\frac{a}{c}$

On voit que l'ellipse a deux foyers ayant leurs ordonnées nulles, c'est-à-dire situés sur le grand axe AA' à une distance $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ de part et d'autre du centre o de l'ellipse (figure 51), et deux directrices, perpendiculaires au grand axe, à des distances $\frac{a^2}{c}$ de part et d'autres de ce petit axe. Le foyer et la directrice qui se correspondent sont situés du même côté du centre de l'ellipse.

33. — La somme des distances de chaque point de l'ellipse aux deux foyers est constante et égale au grand axe 2 a.

Voyons d'abord comment sont placés les foyers et les directrices (figure 51).

De l'extrémité B du petit axe avec un rayon égal à a, décrivons un arc de cercle qui coupe le grand axe aux points F et F'. Les triangles rectangles oBF et oBF' donnent :

$$oF = oF' = \sqrt{\overline{BF}^2 - \overline{oB}^2} = \sqrt{a^2 - b^2} = c$$

Les points F et F' sont donc les foyers.

Pour obtenir les directrices il suffit d'élever des perpendiculaires sur AA' aux points D et D' tels que oA = oA' soit moyenne proportionnelle entre oF = oF' et oD = oD'. On a en effet dans ce cas :

$$oD \times oF = \overline{oA}^2 \qquad oD = \frac{\overline{oA}^2}{oF} = \frac{a^2}{c}$$

$$oD' \times oF' = \overline{oA}'^2 \qquad oD' = \frac{\overline{oA}^2}{oF'} = \frac{a^2}{c}$$

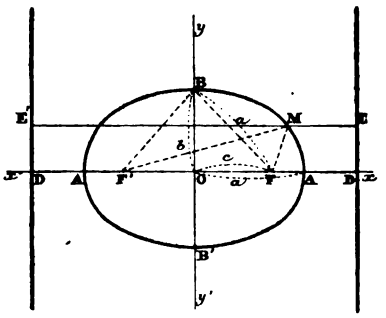

Fig. 51.

Les droites DE, D'E' ont pour équations :

$$x = \frac{a^2}{c} \text{ et } x = -\frac{a^2}{c}$$

ce sont bien les directrices :

Ceci posé, soit M un point de la courbe, menons MF, MF' ; ME, ME' perpendiculaires en E et E' sur les deux directrices. On a :

$$ME = k \times MF$$
$$ME' = k \times MF'$$

Et par suite :

$$ME + ME' = k\,(MF + MF')$$

et

$$MF + MF' = \frac{ME + ME'}{k} = \frac{DD'}{k} = \frac{2\,oD}{k}$$

Mais on a :

$$oD = \frac{a^2}{c}$$

$$k = \frac{a}{c}$$

Donc :

$$MF + MF' = \frac{2a^2}{c} \times \frac{c}{a} = 2a$$

Ce qui démontre la proposition énoncée.

34. — Foyers et Directrices de l'Hyperbole. — Soit :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$$

l'équation d'une hyperbole rapportée à ses axes. Pour trouver ses foyers et ses directrices nous adopterons les mêmes notations qu'au n° 32 et nous pourrons reproduire exactement les calculs relatifs à l'ellipse, en changeant seulement b^2 en $-b^2$. Nous aurons ainsi :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$m = 0,\ k = \frac{a}{c},\ \beta = 0,\ l = \pm\frac{c}{a^2},\ \alpha = \mp c$$

Ce qui nous donne :

1° Coordonnées du foyer : $\alpha = c$, $\beta = 0$; équation de la directrice : $x = \frac{a^2}{c}$

2° Coordonnées du foyer : $\alpha = -c$, $\beta = 0$; équation de la directrice : $x = -\frac{a^2}{c}$.

Dans les deux cas le rapport k est égal à $\frac{a}{c}$.

35. — La différence des distances d'un point quelconque d'une hyperbole aux deux foyers est constante et égale à l'axe réel 2a.

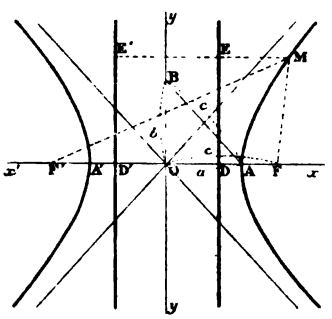

Fig. 52.

Soient F et F' les deux foyers (fig. 52) on a :

$$\overline{oF}^2 = \overline{oF'}^2 = a^2 + b^2 = \overline{oA}^2 + \overline{oB}^2 = \overline{AB}^2$$

Cette équation montre qu'on obtiendra les foyers en portant sur l'axe AA' de chaque côté du centre une longueur égale à AB.

Les deux directrices sont perpendiculaires sur AA' en des points D et D' tels que $o\,D = o\,D' = \frac{a^2}{c} = \frac{\overline{oA}^2}{\overline{oF}}$; o A est moyenne proportionnelle entre oD et oF.

On voit que l'on a :

$$oF = oF' > oA = oA' \text{ et } oD = oD' < oA = oA'$$

Les points D,D' tombent à l'extérieur de la courbe, les points F,F' à l'intérieur. On a d'ailleurs :

$$MF = \frac{1}{k} ME$$

$$MF' = \frac{1}{k} ME'$$

D'où on tire :

$$MF' - MF = \frac{1}{k}(ME - ME') = \frac{1}{k} \times EE' = \frac{1}{k} \times 2oD = \frac{c}{a} \times \frac{2a^2}{c} = 2a$$

Cette égalité démontre la proposition énoncée.

36. — Foyer et Directrice de la Parabole. — Soit une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet (fig. 53) :

$$y^2 - 2\,px = 0 \qquad (1)$$

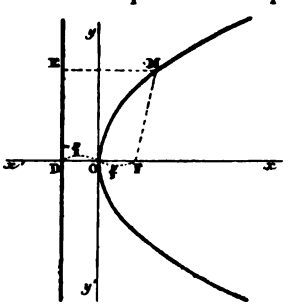

Fig. 53.

Cherchons, comme nous l'avons fait au n° 32 pour l'ellipse, à déterminer les coordonnées α, β d'un foyer et l'équation $lx + my + 1 = 0$ d'une directrice.

Nous serons conduits, par un raisonnement identique à celui du n° 32, à écrire que l'équation (1) ci-dessus et l'équation (2) du n° 32 ont les coefficients des termes semblables proportionnels, ce qui nous donne :

$$\frac{k^2(l^2+m^2) - l^2}{0} = \frac{k^2(l^2+m^2) - m^2}{1} = \frac{-2\,lm}{0} = \frac{-(\alpha\,k^2(l^2+m^2) + l)}{-p}$$

$$= \frac{-[\beta\,k^2(l^2+m^2) + m]}{0} = \frac{k^2(l^2+m^2)(\alpha^2+\beta^2) - 1}{0}$$

ou, en chassant les dénominateurs :

$$k^2(l^2+m^2) - l^2 = 0 \qquad (2)$$

$$lm = 0 \qquad (3)$$

$$k^2\beta(l^2+m^2) + m = 0 \qquad (4)$$

$$k^2(l^2+m^2)(\alpha^2+\beta^2) - 1 = 0 \qquad (5)$$

$$k^2 p(l^2+m^2) - pm^2 = \alpha\,k^2(l^2+m^2) + l \qquad (6)$$

L'équation (3) donne $l = 0$ ou $m = 0$.

Si on prenait $l = 0$ l'équation (2) donnerait $k^2m^2 = 0$; or k ne peut être nul ; m ne peut être nul en même temps que l ; on doit donc prendre $m = 0$.

L'équation (4) donne alors, comme dans le cas des courbes à centre, $k^2 \beta l^2 = 0$, d'où : $\beta = 0$.

L'équation (2) donne :

$$l^2 (k^2 - 1) = 0$$

d'où :

$$k = 1$$

Les équations (5) et (6) deviennent en y remplaçant β et m par zéro et k par 1 :

$$l^2 \alpha^2 = 1 \tag{7}$$

et :

$$p l^2 = \alpha l^2 + l$$

d'où :

$$pl = \alpha l + 1 \tag{8}$$

L'équation (7) donne $\alpha l = \pm 1$. Le signe + est seul admissible car, si on prenait $\alpha l = -1$, l'équation (8) donnerait $pl = 0$, d'où $l = 0$, ce qui est inadmissible, ainsi qu'on l'a déjà vu.

On a donc ;

$$\alpha l = 1$$

$$pl = 1 + 1 = 2$$

$$l = \frac{2}{p}$$

$$\alpha = \frac{1}{l} = \frac{p}{2}$$

Il n'y a, on le voit, qu'un foyer dont les coordonnées sont $\beta = 0$, $\alpha = \frac{p}{2}$ et une directrice dont l'équation est $\frac{2}{p} x + 1 = 0$ ou $x = -\frac{p}{2}$. Le rapport k est égal à 1.

Le foyer F se trouve sur l'axe à une distance o F $= \frac{p}{2}$ du sommet ; la directrice est perpendiculaire à l'axe et le coupe en un point D, situé du côté opposé au foyer par rapport au sommet o de la parabole, et tel que o D est égal à $-\frac{p}{2}$ c'est-à-dire à o F en grandeur absolue.

De plus, M désignant un point de la courbe, si on mène MF et ME perpendiculaire sur la directrice, le rapport $\frac{ME}{MF}$ est égal à 1. En d'autres ME = MF.

On voit donc que **tous les points de la parabole sont à égale distance du foyer et de la directrice.**

TROISIÈME PARTIE

NOTIONS GÉNÉRALES

DE MÉCANIQUE

NOTIONS GÉNÉRALES

DE MÉCANIQUE

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS. — DIVISION DE LA MÉCANIQUE

Mouvement. — Inertie de la matière. — Forces. — Objet de la mécanique. — Division de la mécanique. — Cinématique. — Statique. — Dynamique.

1. — Quand un corps occupe successivement différentes positions dans l'espace, on dit qu'il est *en mouvement.*

On admet a priori que la matière est *inerte*, c'est-à-dire que son état de repos ou de mouvement ne peut être modifié sans l'intervention d'une cause extérieure.

On appelle *force* toute cause extérieure à un corps, capable de modifier l'état de repos ou de mouvement de ce corps.

L'objet de la mécanique est l'étude du mouvement et des forces.

2. — La mécanique se divise en trois parties, dont chacune fera l'objet d'un livre spécial.

La *cinématique*, ou étude du mouvement abstraction faite des causes qui le déterminent.

La *statique,* ou étude des forces dans le cas où leur action est telle qu'elles ne déterminent aucun mouvement pour les corps auxquels elles sont appliquées.

La *dynamique*, ou étude du mouvement en fonction des forces qui le déterminent.

LIVRE PREMIER

CINÉMATIQUE

CHAPITRE II

MOUVEMENT D'UN POINT. — DE LA VITESSE ET DE L'ACCÉLÉRATION

Éléments du mouvement d'un point. — Trajectoire d'un point. — Mouvement d'un point sur sa trajectoire. — De la vitesse. — Du mouvement uniforme. — Le mouvement d'un point est déterminé quand on connaît à chaque instant les variations de la vitesse en grandeur et en direction. — Des résultantes géométriques. — Des projections. — De l'accélération tangentielle et de l'accélération centripète. — Mouvement uniformément varié. — Mouvement de la projection d'un point sur un axe. — Etude analytique du mouvement d'un point. — Relation entre l'accélération et les positions successives d'un point sur la trajectoire.

3. — Trajectoire d'un point. — Mouvement d'un point sur sa trajectoire. — Lorsqu'un point se déplace dans l'espace, les différentes positions qu'il occupe successivement forment une courbe. On appelle cette courbe la *trajectoire* du point.

Pour connaître entièrement le mouvement d'un point, il faut connaître : 1° sa trajectoire, 2° son mouvement sur sa trajectoire, c'est-à-dire la position qu'il occupe à chaque instant sur cette trajectoire.

Soit M un point mobile, AB sa trajectoire (fig. 54), O un point fixe pris pour origine sur cette courbe. On détermine la position du point M sur sa trajectoire, par la longueur s de l'arc OM, comptée positivement dans un sens, de O vers A par exemple, et négativement en sens contraire.

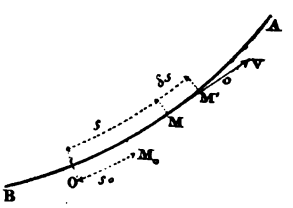

Fig. 54.

Désignons par t le temps qui s'est écoulé à partir d'un moment initial déterminé lorsque le mobile est en M. Il est clair que le mouvement du mobile sur sa tra-

jectoire sera connu, si à chaque instant on connaît la valeur de s en fonction de t. Ce mouvement sera donc déterminé par une équation de la forme :

$$s = f(t)$$

Cette équation s'appelle l'*équation du mouvement du point sur sa trajectoire.*

4. — De la vitesse. — Occupons-nous d'abord du mouvement d'un point sur sa trajectoire. Ce mouvement, nous venons de le voir, est déterminé par une relation entre s et t, c'est-à-dire entre l'espace parcouru et le temps.

Nous avons vu dans la première partie de cet ouvrage que pour établir une relation de la forme $s = f(t)$, nous étions conduits à chercher la relation qui unit les accroissements infiniment petits simultanés des variables s et t.

Supposons qu'un point mobile sur sa trajectoire AB (fig. 54) soit en M à l'instant t, et en M' à l'instant $t + dt$. Pendant le temps infiniment petit dt, le mobile a parcouru l'arc infiniment petit $MM' = \delta s$.

Nous appellerons *déplacement élémentaire* du point M, cet espace δs parcouru pendant le temps dt, et *vitesse* du mobile en M, la limite $\frac{ds}{dt}$ vers lequel tend le rapport $\frac{\delta s}{dt}$ du déplacement élémentaire au temps dt employé à le parcourir, lorsque dt tend vers zéro. En d'autres termes, **la vitesse est la dérivée de l'espace par rapport au temps** [1].

On représente la vitesse par une ligne droite MV dirigée suivant le déplacement élémentaire, c'est-à-dire suivant la tangente en M à la trajectoire, dans le sens du mouvement, et égale à $\frac{ds}{dt}$ en grandeur absolue. C'est à cette droite MV, considérée en grandeur direction et sens, que nous donnerons désormais le nom de vitesse.

5. — Du mouvement uniforme. — La relation la plus simple qui

[1] ds est la différentielle de l'arc s; cette différentielle diffère du déplacement élémentaire δs d'un infiniment petit du second ordre. (V. Ire partie, n° 20.)

puisse exister entre ds et dt est celle qui exprime que la valeur $\frac{ds}{dt}$ de la vitesse est constante. Dans ce cas on dit que le mouvement est *uniforme*.

Nous obtiendrons sans peine l'équation du mouvement uniforme. Désignons par v la valeur constante de la vitesse; nous avons:

$$\frac{ds}{dt} = v$$

ou :

$$ds = v\,dt$$

de là on déduit l'équation du mouvement :

$$s = \int v\,dt = vt + C \qquad (1)$$

Pour déterminer la valeur de la constante C, supposons $t = 0$. Quand t est nul, c'est-à-dire à l'origine du temps, le point mobile occupe une certaine position M_0 sur sa trajectoire (fig. 54).

Soit s_0 l'arc oM_0; l'équation (1) dans laquelle nous faisons $t = s_0$ nous donne $s_0 = C$, et par suite l'équation du mouvement est la suivante :

$$s = s_0 + vt$$

Cette équation est du premier degré en t. On en déduit:

$$s - s_0 = v$$

Cette égalité montre que, dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus $s - s_0$ sont proportionnels aux temps t employés à les parcourir. Le rapport constant de ces deux variables, ou l'espace parcouru dans l'unité de temps, est égal à la vitesse.

6. — Les éléments du mouvement d'un point sont déterminés quand on connaît à chaque instant les variations infiniment petites de la vitesse en grandeur et en direction. — Revenons à l'étude du mouvement d'un point dans le cas général où la vitesse v varie avec le temps. Dans ce cas v est une certaine fonction de t; désignons-la par $\varphi(t)$ nous avons:

$$v = \frac{ds}{dt} = \varphi(t)$$

D'où :

$$ds = \varphi(t)\, dt$$

En intégrant cette équation nous avons l'équation du mouvement :

$$s = \int \varphi(t)\, dt$$

Donc, si à chaque instant nous connaissons la grandeur de la vitesse, nous en déduirons par une simple intégration l'équation du mouvement du point sur sa trajectoire, qui est l'un des deux éléments du mouvement du point.

Il est aisé de voir que l'autre élément du mouvement du point, c'est-à-dire sa trajectoire, est également déterminé, si nous connaissons à chaque instant la vitesse, non seulement en grandeur mais encore en direction, et si nous nous donnons en outre la position et la vitesse du point à un moment initial connu.

Fig. 55.

Soit M_0 la position du point, $M_0V_0 = v_0$ sa vitesse (fig. 55) à un instant initial connu t_0. Cherchons quelle sera la position M' du point M_0 au bout d'un temps infiniment petit dt, compté à partir de t_0.

Nous savons que M_0M' fait avec la direction M_0V_0 de la vitesse un angle infiniment petit θ. De plus, si nous appelons comme précédemment δs l'arc MM', nous savons que δs diffère de la droite M_0M' d'un infiniment petit d'ordre supérieur au premier (voir première partie n° 74); comme d'autre part la différence entre δs et la différentielle ds de l'arc s est également un infiniment petit du second ordre, il en résulte que la droite M_0M' diffère de ds d'un infiniment petit du second ordre.

Portons sur M_0V_0 une longueur $M_0M_1 = ds = v_0\, dt$. Je dis que le point M_1 est à une distance infiniment petite du second ordre du point M'. En effet abaissons de M', M'P perpendiculaire sur M_0M_1 ; PM_1, est du second ordre, car on a :

$$PM_1 = M_0P - M_0M_1 = M_0M' \cos\theta - ds$$

L'angle θ étant infiniment petit, on a :

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$ [1]

on a donc, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre :

$$PM_1 = M_0M' - ds$$

La droite PM_1 est donc un infiniment petit du second ordre. Il en est de même de PM', car on a :

$$PM' = M_0M' \sin\theta = M_0M' \times \theta$$

Dans le triangle rectangle PM_1M', les deux côtés de l'angle droit sont infiniment petits du second ordre. Donc l'hypothénuse $M'M_1$ égale à la racine carrée de la somme des carrés des côtés, est aussi du second ordre.

Donc si on porte suivant la vitesse M_0V_0 une longueur M_0M_1 égale à v_0dt, le point M_1 ainsi obtenu représente, à un infiniment petit du second ordre près, la position du point mobile à l'instant $t_0 + dt$.

Si nous connaissons à chaque instant la valeur et la direction de la vitesse, nous passerons du point M_1 au point M_2, représentant, à un infiniment petit du second ordre près, la position du mobile à l'instant $t_0 + 2\,dt$, en portant sur une droite M_1M_2, ayant la direction de la vitesse au point M_1, une longueur $M_1M_2 = v_1dt$.

En procédant ainsi de proche en proche, nous pourrons avec ces données déterminer la position du mobile à un instant quelconque, et par suite, sa trajectoire. Donc les deux éléments du mouvement

[1] En effet, si dans la formule connue :

$$\cos p - \cos q = 2 \sin\frac{p+q}{2} \sin\frac{q-p}{2}$$

Nous faisons :

$$p = \theta \qquad q = 0$$

Il vient :

$$\cos\theta - 1 = 2 \sin\frac{\theta}{2} \sin -\frac{\theta}{2} = -2 \sin^2\frac{\theta}{2} = -2\,\frac{\theta^2}{4} = -\frac{\theta^2}{2}$$

et par suite :

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

d'un point seraient déterminés si on connaissait à chaque instant la vitesse du point en grandeur et en direction.

Mais les données dont on dispose en mécanique ne permettent pas, en général, d'établir directement des équations qui déterminent à chaque instant la vitesse en grandeur et en direction.

Nous sommes alors conduits à opérer sur les vitesses comme tout à l'heure sur les espaces, c'est-à-dire à faire intervenir les variations infiniment petites de la vitesse en grandeur et en direction, pendant un intervalle de temps infiniment petit *dt*.

Ces variations infiniment petites de la vitesse en grandeur et en direction sont déterminées par ce qu'on appelle *l'accélération* du point mobile.

Or on verra par la suite que, tandis que les données dont on dispose en mécanique ne permettent pas en général d'établir immédiatement des équations qui déterminent la vitesse en fonction du temps, il existe au contraire des relations de la plus grande simplicité entre ces mêmes données et les accélérations.

Mais avant d'aller plus loin et de définir l'accélération, nous allons, pour la facilité de l'exposition, donner quelques définitions.

7. — Résultante géométrique de plusieurs droites. — Soient D, D′, D″, D‴ (fig. 56) plusieurs droites de l'espace dont nous connaissons la grandeur, la direction et le sens. D'un point O pris arbitrairement menons les droites OA, AB, BC, CE, ayant respectivement même grandeur, même direction et même sens que les droites D, D′, D″, D‴. Menons la droite OE. Cette droite, considérée en grandeur, direction et sens, est dite *la résultante géométrique* des droites données. Celles-ci sont dites les *composantes* de la droite OE.

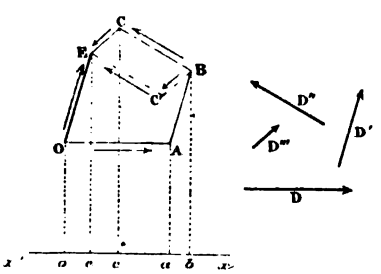

Fig. 56.

La résultante est, on le voit, égale et directement opposée à la droite EO, qui fermerait le polygone OABCE, dont les côtés sont respectivement égaux en grandeur, direction et sens aux composantes.

Si les composantes sont au nombre de trois $X = OA$, $Y = AB$, $Z = BC$, la résultante R est la diagonale du parallélipipède construit sur les trois droites OA, AB, BC (fig. 57).

Si ces trois droites sont rectangulaires, on a (figure 57) :

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

ou

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

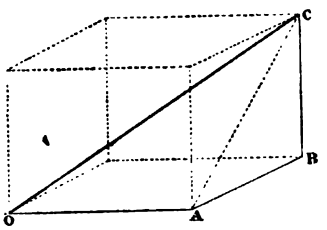

Fig. 57.

De plus si on désigne par (X, R), (Y, R), (Z, R) les angles que les composantes font respectivement avec la résultante, on a :

$$\cos COA = \cos (X, R) = \frac{OA}{OC} = \frac{X}{R}$$

On aurait de même :

$$\cos (Y, R) = \frac{Y}{R}; \cos (Z, R) = \frac{Z}{R}$$

On peut sans modifier la résultante intervertir l'ordre des composantes. — Considérons d'abord deux composantes successives BC, CE (figure 56). Intervertissons l'ordre qu'elles occupent dans le polygone de composition. A cet effet menons par B, BC′ ayant même grandeur, même direction et même sens que CE, puis par C′ menons C′E de mêmes grandeur, direction et sens que BC. La figure BCEC′ étant un parallélogramme, nous retombons ainsi sur le point E primitivement obtenu. La droite OE représente donc la résultante des droites données composées indifféremment soit dans l'ordre D, D′, D″, D‴, soit dans l'ordre D, D′, D‴, D″.

Considérons maintenant deux composantes non successives AB et CE. Nous pourrons, en vertu de ce qui précède, permuter les deux composantes successives AB et BC, puis AB et CE, puis enfin BC et CE. Nous serons ainsi passés de l'ordre de composition D, D′, D″, D‴, à l'ordre D, D″, D′, D‴, puis à l'ordre D, D″, D‴, D′, puis enfin à l'ordre D, D‴, D″, D′. Chaque permutation, s'effectuant entre deux composantes voisines, n'a pas modifié la résultante.

Celle-ci est donc restée la même, et l'ordre final des composantes ne diffère de l'ordre primitif que par la permutation des composantes D′ et D″, ou AB et CE.

On conçoit que par une série de permutations analogues on peut toujours donner aux composantes tel ordre que l'on veut, sans jamais modifier la résultante.

8. — Des projections d'un point sur un axe. — On appelle *projection* d'un point sur un axe parallèlement à un plan fixe, l'intersection de l'axe et d'un plan parallèle au plan fixe, mené par le point considéré.

La projection d'une ligne est le lieu géométrique des projections de ses points. Quand la ligne est droite, sa projection est la portion de l'axe comprise entre les plans projetants menés par les extrémités de la droite.

Quand on considère le sens d'une ligne droite, on donne à sa projection le signe + ou le signe — suivant que cette projection est dirigée dans un sens positif convenu sur l'axe de projection, ou dans le sens contraire.

La projection d'une résultante est égale à la somme algébrique des projections des composantes. — Soit x x′ l'axe de projection (fig. 56); projetons sur cet axe le polygone de composition O A BC E des composantes D, D′, D″, D‴. Soient o, a, b, c, e les projections des sommets de ce polygone. On a évidemment

$$oe = oa + ab - bc - ce$$

Les longueurs précédées du signe + sont celles qui correspondent aux projections positives. Celles précédées du signe — correspondent aux projections négatives. Cette égalité démontre la proposition énoncée.

9. — De l'accélération. — Nous avons montré au n° 6 comment le mouvement d'un point était déterminé quand on connaissait à chaque instant les variations de la vitesse en grandeur et en direction, étant données d'ailleurs une position et une vitesse initiales du point à un moment connu.

Nous allons voir maintenant comment on fait intervenir en mécanique ces variations de la vitesse.

Soit M la position qu'un point mobile occupe à un instant t sur sa trajectoire. Soit v sa vitesse au même instant : elle est dirigée suivant MV (fig. 58) ; à l'instant $t + dt$ infiniment voisin de t, le mobile vient occuper la position M', infiniment voisine de M. Sa vitesse a la valeur $v + dv$; elle est dirigée suivant M' V', faisant avec M V un angle infiniment petit $d\alpha$.

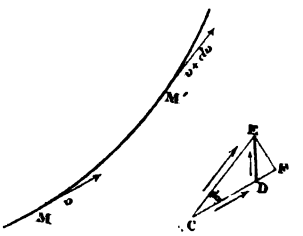

Fig. 58.

Par un point quelconque C, menons les droites CD, CE, ayant respectivement mêmes grandeurs, directions et sens que les vitesses v et $v + dv$. Menons la droite D E. La vitesse $v + dv$ est la résultante géométrique de la vitesse v et de la droite D E.

Cette droite D E définit donc, par sa grandeur et sa direction, les variations de la vitesse v en grandeur et en direction, pendant le temps infiniment petit dt.

On donne à D E le nom de *vitesse acquise élémentaire*, ou d'*accélération élémentaire*, et on donne le nom d'*accélération totale*, ou simplement d'*accélération*, au rapport $\frac{DE}{dt}$ de cette accélération élémentaire au temps dt pendant lequel elle a été acquise.

On représente l'accélération par une ligne droite dirigée suivant D E et égale à $\frac{DE}{dt}$ en grandeur absolue. C'est à cette ligne droite, considérée en grandeur, direction et sens, que nous donnerons désormais le nom d'accélération.

10. — Accélération tangentielle, accélération centripète. — On appelle *plan osculateur* à une courbe gauche le plan de deux tangentes infiniment voisines, ou encore le plan déterminé par une tangente et un point de la courbe infiniment voisin du point de contact [1].

[1] Les deux définitions sont bien équivalentes. En effet, d'après la première, le plan osculateur est la limite du plan passant par la tangente mt au point m et la droite m t_1 parallèle à la tangente m' t' au point m' lorsque m' tend vers m; d'après la seconde le pla osculateur est la limite du plan passant par mt et m m'. Or les droites m t m m' tendant vers la même limite mt, les plans m t t_1, mt m' tendent bien vers la même limite.

Il résulte de ce qui précède que l'accélération est parallèle au plan osculateur. On peut donc la décomposer en deux composantes situées dans ce plan et dirigées l'une suivant la tangente, l'autre suivant la normale à la trajectoire.

Soient EF, DF les deux composantes de l'accélération élémentaire DE; $\frac{EF}{dt}$, $\frac{DF}{dt}$ seront les composantes de l'accélération $\frac{DE}{dt}$ (fig. 58). Nous avons :

$$DF = CF - CD = (v + dv) \cos d\alpha - v$$

Et comme on a $\cos d\alpha = 1$, en négligeant les infiniment petits du second ordre (voir n° 6, note 1), l'égalité précédente devient :

$$DF = dv$$

La composante $\frac{DF}{dt}$ de l'accélération suivant la tangente à la trajectoire a donc pour valeur $\frac{dv}{dt}$. On lui donne le nom d'*accélération tangentielle*. Elle est égale à la dérivée par rapport au temps de la vitesse v ou $\frac{ds}{dt}$, et par suite, à la dérivée seconde $\frac{d^2 s}{dt^2}$ de l'espace par rapport au temps.

Evaluons maintenant EF. Nous avons en négligeant les infiniment petits du second ordre :

$$EF = CE \sin d\alpha = (v + dv) \sin d\alpha = v\, d\alpha$$

La composante $\frac{EF}{dt}$ de l'accélération suivant la normale à la courbe située dans le plan osculateur a donc pour valeur $v \frac{d\alpha}{dt}$.

Désignons par ρ le rayon de courbure $\frac{ds}{d\alpha}$ de la trajectoire au point M. Nous avons (voir Ire partie, n° 74) :

$$d\alpha = \frac{ds}{\rho}$$

Et par suite :

$$\frac{EF}{dt} = v \frac{d\alpha}{dt} = \frac{v\, ds}{\rho\, dt} = \frac{v}{\rho} \times \frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho}$$

La composante de l'accélération suivant la normale à la courbe située dans le plan osculateur, qu'on appelle aussi normale principale, est donc égale à $\frac{v^2}{\rho}$. On lui donne le nom d'*accélération centripète*.

On voit que l'accélération tangentielle détermine dv c'est-à-dire la variation de la vitesse en grandeur pendant le temps dt, et que l'accélération centripète, connaissant v et par suite ds, détermine ρ, c'est-à-dire $d\alpha$, ou en d'autres termes, la variation de la vitesse en direction.

Si le mouvement est rectiligne, $d\alpha$ est nul, ρ est infiniment grand et par suite l'accélération centripète est nulle. Dans ce cas l'accélération totale se confond avec l'accélération tangentielle.

11. — Mouvement uniformément varié. — Quand l'accélération tangentielle a une valeur constante j, l'équation du mouvement est facile à déterminer. On a, en effet :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = j$$

D'où on déduit :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} dt = dv = jdt$$

Intégrons cette équation ; nous avons :

$$\frac{ds}{dt} = v = \int jdt = jt + C_1 \qquad (1)$$

Pour déterminer la constante C_1, faisons $t = 0$ dans l'équation ci-dessus ; nous avons, en désignant par v_0 la valeur initiale de la vitesse à l'origine du temps :

$$v_0 = C_1$$

Et l'équation (1) devient :

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 + jt \qquad (2)$$

On en déduit :

$$ds = vdt = v_0\, dt + j\, t\, dt$$

En intégrant on obtient l'équation du mouvement :

$$s = \int v_0\, dt + \int j\, t\, dt = v_0\, t + \frac{1}{2} j\, t^2 + C_2$$

Pour déterminer la constante C_2, faisons $t = 0$ dans l'équation

précédente; nous avons en désignant par s_0 la valeur initiale de s:

$$s_0 = C_2$$

Et l'équation du mouvement devient,

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2 \qquad (3)$$

L'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{v - v_0}{t} = j$$

Cette dernière équation nous montre que, lorsque l'accélération tangentielle est constante, la vitesse augmente proportionnellement au temps. L'accélération est égale à l'augmentation de vitesse pendant l'unité de temps.

On dit pour cette raison que dans ce cas, le mouvement est *uniformément varié*. Quand l'accélération tangentielle j est positive, on dit qu'il est *uniformément accéléré ;* on dit qu'il est *uniformément retardé* quand j est négatif.

Si dans l'équation (3) du mouvement on fait $v_0 = 0$, on a

$$s - s_0 = \frac{1}{2} j t^2 \qquad (3)$$

Cette égalité montre que, dans le mouvement uniformément varié, si le mobile part du repos, l'espace parcouru est égal au produit du carré du temps par la demi-accélération.

12. — Mouvement de la projection sur un axe d'un point mobile. — Soit M un point mobile (fig. 59), P_x sa projection sur un axe fixe ox, parallèlement à un plan fixe zoy. Étudions le mouvement du point P_x lorsque le point M se déplace sur sa trajectoire.

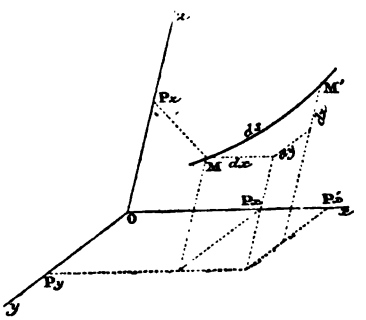

Fig. 59.

Nous allons démontrer qu'à chaque instant la vitesse et l'accélération du point P_x sont respectivement égales aux projections sur ox de la vitesse et de l'accélération du point M.

1° *La vitesse du point* P_x *est égale à la projection de la vitesse du*

point M. En effet soit $MM' = ds$ le déplacement élémentaire du point M pendant le temps dt. La vitesse du point M est dirigée suivant MM'; sa valeur est égale à $\frac{ds}{dt}$. Quand M vient en M', P_x vient en P'_x. Désignons par x la distance o P_x. Le déplacement élémentaire $P_x P_x' = dx$ du point P_x est égal à la projection de $MM' = ds$ sur ox. Par suite la vitesse $\frac{dx}{dt}$ du point P_x, dirigée suivant dx, est égale à la projectoire sur ox de la vitesse $\frac{ds}{dt}$ du point M, dirigée suivant ds.

2° *L'accélération du point* P_x *est égale à la projection de l'accélération du point* M. En effet projetons sur ox la figure du n° 9. La projection de CD ou v est, nous venons de le voir, égale à $\frac{dx}{dt}$; la projection de CE ou $v + dv$, est par conséquent égale à $\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ c'est-à-dire à $\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\,dt$. La projection de DE, ou jdt, en désignant par j l'accélération $\frac{DE}{dt}$ du point M, est égale à la différence des projections de la résultante CE et de la composante CD. On a donc :

$$\text{Proj. de } j\,dt = \text{Proj. de CE} - \text{Proj. CD} = \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\,dt - \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,dt$$

La projection de j est donc égale à $\frac{d^2x}{dt^2}$, accélération tangentielle de P_x. Nous savons d'ailleurs que cette accélération tangentielle se confond avec l'accélération totale, le mouvement du point P_x sur ox étant rectiligne.

Donc la vitesse et l'accélération du point P_x sont respectivement égales aux projections sur ox de la vitesse et de l'accélération du point M.

Si à chaque instant nous connaissons l'accélération j du point M, nous connaîtrons de même l'accélération $\frac{d^2x}{dt^2}$ du point P_x; $\frac{d^2x}{dt^2}$ sera donc une fonction connue du temps, $\varphi(t)$: nous en déduirons l'équation du mouvement de P_x sur sa trajectoire ox ; nous aurons :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_0(t)$$

D'où :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} dt = \varphi (t) dt$$

$$\frac{dx}{dt} = \int \varphi (t) dt$$

$$dx = dt \int \varphi (t) dt$$

et enfin :

$$x = \int dt \int \varphi (t) dt = \int \int \varphi (t) dt^2$$

Nous aurons x au moyen d'une double intégration. Sa valeur contiendra, on le sait, deux constantes arbitraires, que nous déterminerons, si nous connaissons la position et la vitesse du point M à un moment initial connu, en écrivant que, à cet instant, la vitesse $\frac{dx}{dt}$ ou $\varphi (t) dt$ de P_x est égale à la projection de la vitesse de M sur ox, et que l'abscisse x de P_x est au même instant égale à la distance du point o à la projection du point M.

13. — Étude analytique du mouvement d'un point. — Supposons maintenant que nous nous proposions de résoudre le problème général suivant : déterminer le mouvement d'un point connaissant à chaque instant son accélération j.

Rapportons les positions du point à trois axes de coordonnées ox, oy, oz (fig. 59). Soient P_x, P_y, P_z les projections du point mobile M sur les trois axes, la projection sur chaque axe étant faite parallèlement au plan des deux autres ; o $P_x = x$, o $P_y = y$, o $P_z = z$ sont les coordonnées du point M.

L'accélération j du point M étant connue à chaque instant, ses projections $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ sur les trois axes, sont des fonctions connues du temps :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \varphi (t) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \psi (t) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \chi (t) \qquad (1)$$

On en déduit comme dans le numéro précédent :

$$\frac{dx}{dt}=\int\varphi(t)\,dt \quad \frac{dy}{dt}=\int\psi(t)\,dt \quad \frac{dz}{dt}=\int\chi)(t^2dt \tag{2}$$

$$x=\int\int\varphi(t)\,dt^2 \quad y=\int\int\psi(t)\,dt^2 \quad z=\int\int\chi(t)\,dt^2 \tag{3}$$

Les équations (3) déterminent les mouvements des points P_x, P_y, P_z et par suite, du point M.

Si on veut avoir l'équation de la trajectoire, il suffit d'éliminer t entre les trois équations (3) ; on obtiendra deux équations entre x, y, z. Ces deux équations représenteront deux surfaces, dont l'intersection sera la trajectoire cherchée.

Pour avoir le mouvement du point sur sa trajectoire, on remarquera que le déplacement élémentaire $MM' = ds$ du point M est la résultante géométrique des déplacements élémentaires dx, dy, dz des points P_x, P_y, P_z ; donc la vitesse $\frac{ds}{dt}$ est la résultante géométrique de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, c'est-à-dire la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées et ont pour longueurs respectives $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Les équations (2) nous font connaître $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ en fonction du temps; connaissant les angles que font entre eux les axes, on en déduira à chaque instant $\frac{ds}{dt}$, qui sera ainsi connu en fonction du temps :

$$\frac{ds}{dt}=\xi(t) \text{ ou } ds=\xi(t)\,dt$$

Et l'équation du mouvement du point sur sa trajectoire sera

$$s=\int\xi(t)\,dt$$

14. — Relations entre l'accélération d'un point et ses positions successives sur sa trajectoire. — Soit M la position d'un point mobile sur sa trajectoire, à l'instant t; M' sa position à l'instant $t+dt$ (fig. 60).

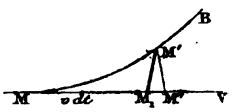

Fig. 60.

Si lorsque le mobile est en M, son accélération était brusquement supprimée, sa vitesse cesserait de varier en grandeur et en direction ; le point se déplacerait avec

une vitesse constante v, égale à la vitesse effective en M, en suivant la direction M V de la tangente à la trajectoire. Au bout du temps dt il serait au point M_1 situé sur cette droite M V, à une distance du point M, $MM_1 = v\,dt$.

Ce déplacement MM_1 représente donc le déplacement du mobile sous l'influence de la vitesse seule. Si nous joignons M_1M', cette droite, qui est infiniment petite du second ordre (voir n° 6), représentera le déplacement du mobile dû à l'effet de l'accélération pendant le temps dt. Le déplacement élémentaire MM' du mobile, est la résultante des deux déplacements MM_1, M_1M'.

Cherchons quelles relations unissent le déplacement M_1M' à l'accélération.

Nous allons démontrer d'abord que l'accélération est dirigée suivant M_1M'.

A cet effet, projetons, parallèlement à une direction quelconque $M'M''$, le point mobile sur la direction M V de la vitesse en M, et voyons quel est, pendant le temps dt, le mouvement de cette projection.

Cette projection a pour vitesse la projection de v sur MV, c'est-à-dire la vitesse v elle-même. Son accélération j_v est égale à la projection sur MV de l'accélération j du point M : son déplacement sous l'influence de sa vitesse seule pendant le temps dt sera égal à MM_1 et son déplacement sous l'influence de son accélération sera égal à M_1M'', M'' étant la projection du point M'. Le mouvement du point M projeté sur M V étant rectiligne, son accélération j_v se confond avec son accélération tangentielle. D'ailleurs j et par suite j_v peuvent être considérés comme constants pendant l'intervalle de temps infiniment petit dt. Le mouvement du point M en projection sur M V ayant une accélération tangentielle j_v constante pendant le temps dt, son mouvement peut être considéré comme uniformément varié pendant ce temps, et par suite le déplacement MM'' a pour expression (voir l'équation (3) du n° 11) :

$$MM'' = v\,dt + \frac{1}{2} j_v\,dt^2$$

Mais $v\,dt = MM_1$; donc on a :

$$\frac{1}{2} j_v\,dt^2 = MM'' - v\,dt = MM'' - MM_1 = M_1M',$$

Si on suppose que le plan projetant adopté soit parallèle a $M'M_1$, M'' coïncide avec M_1, $M_1 M''$ est nul, et par suite il en est de même de j_v ; donc la projection de j sur M V, suivant un plan quelconque parallèle à $M'M_1$ est nulle, ce qui démontre que j est dirigé suivant $M'M_1$.

Pour avoir la grandeur de $M'M_1$ en fonction de j, projetons sur cette droite le point mobile, parallèlement à M V ; la vitesse de la projection est égale à la projection de M V, qui est nulle ; son accélération est égale à la projection de j sur sa propre direction c'est-à-dire à j. Le mouvement de cette projection peut d'ailleurs être considéré comme uniformément varié pendant le temps dt. Le déplacement M_1M' de cette projection pendant le temps dt a donc pour expression (voir l'équation (3) du n°11) :

$$M_1 M' = \frac{1}{2} j\, dt^2$$

Cette égalité fait connaître j en fonction de $M_1 M'$.

En résumé, M, M' étant deux positions infiniment voisines d'un mobile, si on prend à partir du point M sur la tangente à la trajectoire une longueur $MM_1 = v\, dt$, M_1M' représente le déplacement du mobile dû à son accélération j pendant le temps dt ; cette droite est dirigée suivant l'accélération, et a pour longueur $\frac{1}{2} j\, dt^2$.

CHAPITRE III

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE

Définition d'un solide. — Mouvement d'un solide parallèlement à un plan. — Mouvement d'un solide dont un point est fixe. — Mouvement élémentaire le plus général d'un corps solide. — Mouvement continu d'un solide dans l'espace.

15. — Définition. — On appelle *corps solide* un corps dont tous les points sont à des distances invariables les uns des autres. Nous étudierons successivement dans deux cas particuliers le mouvement d'un corps solide. Nous passerons de là à l'étude du mouvement le plus général.

16. — Mouvement d'un corps solide parallèlement à un plan — Soit MN une droite quelconque située dans un plan parallèle au plan donné (fig. 61). Supposons le corps solide invariablement lié à MN. Etudions d'abord le mouvement de cette droite. Soit M'N' la position que MN occupe au bout d'un temps infiniment petit *dt*. Les droites MN, M'N' sont dans un même plan parallèle au plan donné; elles se coupent donc en un certain point B. Le point qui est en B sur la droite MN au commencement du mouvement occupe une certaine position C sur M'N' à la fin du mouvement. Le point qui à la fin du mouvement est en B sur M'N' occupait une position A sur MN au commencement du mouvement. On a évidemment AB = BC. Si des milieux D et E de AB et de BC nous élevons des perpendiculaires à ces droites, elle se coupent en O, centre du cercle passant par les points A, B, C. Il est évident qu'on amènera

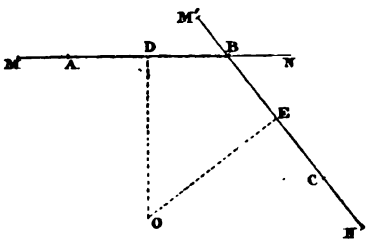

Fig. 61.

la droite MN à la position M'N' en la faisant tourner d'un angle égal à DOE autour d'un axe perpendiculaire en O au plan de la figure. Le mouvement élémentaire du corps solide, invariablement lié à la droite MN, sera donc une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan donné. Cet axe s'appelle *axe instantané de rotation*.

Cherchons à déterminer en grandeur direction et sens le déplacement d'un point quelconque M du solide dans son mouvement élémentaire autour de l'axe instantané de rotation.

Abaissons du point M une perpendiculaire ME sur cet axe OO'. Pendant la durée dt du déplacement élémentaire, le point M décrira un arc de cercle MM' ayant ME pour rayon et situé dans un plan perpendiculaire à OO'. L'angle au centre MEM' est l'angle du déplacement élémentaire. Désignons par ω le rapport $\frac{MEM'}{dt}$ de cet angle à la durée du déplacement élémentaire ; ω est ce qu'on appelle la *vitesse angulaire* de la rotation; cette vitesse est comptée positivement quand la rotation s'effectue dans un sens déterminé pour un observateur couché le long de l'axe, les pieds en O la tête en O'; elle est comptée négativement en sens contraire. L'angle MEM' a pour valeur $\omega\ dt$. Si d'ailleurs on désigne par r la distance ME du point M à l'axe instantané de rotation, l'arc MM' a pour valeur le produit de l'angle au centre MEM' par le rayon ME, c'est-à-dire $\omega r dt$.

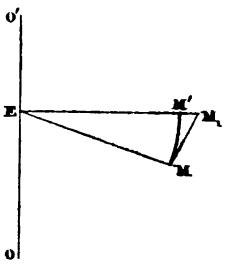

Fig. 62.

Si on mène la tangente MM_1 à l'arc de cercle MM', M_1 désignant le point où cette tangente rencontre le rayon EM', on sait (voir première partie, n° 74) que MM_1 est égal à MM', c'est-à-dire à $\omega r dt$, à un infiniment petit d'ordre supérieur près, et que la distance M_1M' est elle-même un infiniment petit du second ordre (voir première partie n° 73). MM_1 peut donc être substitué à MM'. Cette droite MM_1 est perpendiculaire à ME et à OO', et par conséquent au plan MEOO' passant par le point M et par l'axe OO'.

On voit donc que le déplacement élémentaire d'un point quelconque du solide, situé à une distance r de l'axe instantané de rotation, a pour grandeur $\omega r dt$; pour direction, la direction perpen-

diculaire au plan passant par le point et par l'axe instantané de rotation, et pour sens le sens du mouvement.

La vitesse du point M a pour grandeur $\frac{MM'}{dt}$ c'est-à-dire ωr. Sa direction et son sens sont ceux du déplacement élémentaire.

Du mouvement élémentaire, il est aisé de passer au mouvement fini. Soit O le pied de l'axe instantané de rotation, à un instant quelconque (fig. 63). Au bout d'un temps infiniment petit dt, cet axe occupera une nouvelle position infiniment voisine de O, α: puis il viendra en β, en γ, δ, etc. Le point qui au bout du temps dt doit venir en α, occupe à l'origine du mouvement une certaine position a; les points qui deviennent de même successivement les pieds des axes de rotation β, γ, δ.... occupent au début des positions b, c, d... Les points O, α, β, γ, δ, forment une courbe; de même les points O, a, b, c, d... Les deux courbes sont d'ailleurs tangentes en O, car les droites O a, O α différent infiniment peu des tangentes en O aux deux courbes, et, la rotation élémentaire autour de O qui amène a en α étant infiniment petite, l'angle a O α est infiniment petit. De plus O a = O α; donc, dans le mouvement, les deux courbes rouleront sans glissement l'une sur l'autre.

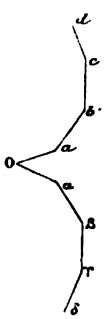

Fig. 63.

Le mouvement d'un corps solide parallèlement à un plan fixe peut donc être considéré comme engendré par le roulement sans glissement d'un cylindre mobile Oabcd, relié invariablement au corps solide, sur un cylindre fixe O$\alpha\beta\gamma\delta$..., les deux cylindres ayant respectivement leurs génératrices perpendiculaires au plan donné, et ayant pour bases les courbes ci-dessus définies. C'est là ce qu'on appelle un *mouvement épicycloïdal.*

17. — Mouvement d'un corps solide dont un point est fixe. — Considérons une sphère de rayon constant ayant son centre au point fixe O (fig. 64). Donnons-nous sur cette sphère deux points A et B auxquels nous supposons le corps solide invariablement lié à un instant quelconque t. Au bout d'un temps infiniment petit dt, A et B sont venus en A′ et B′; menons les grands cercles AB, A′B′; soit C leur point d'intersection. Pour déterminer la nouvelle position d'un point M de la sphère, supposé invariablement lié au corps solide, il suffit

de mener le grand cercle CM, de prendre sur le grand cercle A'B' A'C' = AC (le point C' est évidemment la nouvelle position de C au bout du temps *dt*), de mener C'M', grand cercle faisant avec C'A' un angle M'C'B' = MCB et de porter sur ce grand cercle C'M' = CM. Prolongeons C'M' et CM jusqu'en leur intersection I ; on voit que si on avait CI = C'I le point I ne changerait pas de place pendant le mouvement élémentaire.

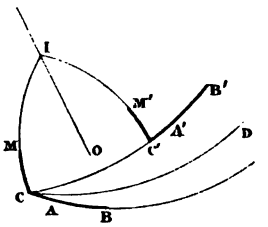

Fig. 64.

Voyons à quelle condition cette égalité peut être satisfaite. Si elle a lieu le triangle sphérique ICC' est isocèle et on a :

$$ICC' = IC'C \qquad (1)$$

D'autre part on a :

$$ICC' = ICB - BCC'$$

Et, en remarquant que :

$$IC'B' = ICB$$

on a :

$$IC'C = 180 - IC'B' = 180 - ICB$$

Substituons ces valeurs dans l'égalité (1), il vient :

$$ICB - BCC' = 180^\circ - ICB$$
$$2\,ICB = 180^\circ + BCC'$$
$$ICB = 90^\circ + \frac{BCC'}{2}$$

Donc il suffit de mener CM perpendiculaire sur la bissectrice CD de l'angle BCC', de mener C'M' faisant avec C'B' un angle égal à MCB ; l'intersection I de ces deux grands cercles est fixe pendant le mouvement élémentaire du corps solide considéré.

Le centre O de la sphère étant fixe par hypothèse, il est clair qu'une rotation autour de la droite OI amènera AB en A'B' et par suite amènera de sa position initiale à sa position finale le corps solide lié à AB.

Cette droite OI est ce qu'on appelle l'*axe instantané de rotation*. Les explications données au numéro précédent, relativement au déplacement d'un point quelconque du solide dans ce mouvement de rotation élémentaire, sont exactement applicables au cas présent.

On verrait par un raisonnement semblable à celui du n° 16 que si on considère les positions successives de l'axe instantané de rotation dans la suite du mouvement, et les positions qu'occupent à l'origine du mouvement les droites qui deviendront les axes instantanés de rotation, on obtient deux cônes, l'un fixe, l'autre mobile : ce dernier, en roulant sans glissement sur le premier, imprime le mouvement considéré au corps solide auquel il est supposé invariablement lié.

18. — Mouvement élémentaire le plus général d'un corps solide. — Soit A (fig. 65) la position qu'occupe à un instant t l'un des points du solide, A′ la position que ce point occupe à l'instant $t + dt$. On peut amener le solide de sa position initiale à sa position finale 1° en lui imprimant un mouvement de translation égal et parallèle à AA′; 2° en le déplaçant tout en laissant fixe le point A′. Ce dernier mouvement est en vertu du n° 17 une rotation élémentaire autour d'un axe instantané MN passant par A′. Donc on peut amener le solide d'une position à une autre infiniment voisine au moyen de deux mouvements élémentaires l'un de translation, l'autre de rotation autour d'un axe instantané.

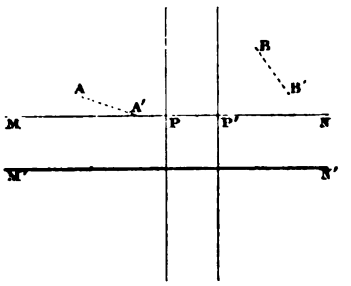

Fig. 65.

Ces deux mouvements peuvent se faire d'une infinité de manières différentes. En effet à la place du point A on aurait pu pendre un poit quelconque B, venant en B′. La translation aurait été égale et parallèle à BB′, la rotation se fût effectuée autour d'un axe passant par B′.

Parmi cette infinité de manières d'amener le solide d'une position à une autre infiniment voisine par une translation et une rotation, il en est une pour laquelle la translation est parallèle à l'axe de rotation.

En effet, supposons que nous ayons pris, comme nous l'avons fait d'abord, la translation égale et parallèle à AA′ ; MN est l'axe instantané de rotation. Coupons le solide par un plan P perpendi-

culaire à MN. Soit F la figure formée par l'intersection de ce plan et du solide dans sa position initiale. La translation AA amènera P en P′ et F dans une certaine position F′, située dans P′ ; la rotation autour de MN ne change pas la position de P′ et amène F′ dans une position F″, située toujours dans P′. Donnons maintenant au solide, à partir de la position initiale, une translation égale et parallèle à PP′, perpendiculaire commune aux deux plans ; F vient dans une position F_1 dans P′ ; pour amener le solide de la position correspondante à F_1 à sa position finale, il suffit d'amener F_1 en F″, ce qui se fera par une rotation autour d'un axe instantané M′N′ perpendiculaire à P′ (voir n° 16) et par suite parallèle à PP′. Le mouvement consiste en une rotation autour de M′N′ et un glissement suivant ce même axe, qu'on appelle *axe instantané de rotation et de glissement*. C'est là ce qu'on appelle un *mouvement héliçoïdal*.

La position de l'axe instantané de rotation et de glissement est à chaque instant unique et déterminée. En effet, soit u la vitesse à l'instant t du mouvement élémentaire de translation parallèle à l'axe instantané M′N′ (fig. 66) et ω la vitesse angulaire au même instant de la rotation élémentaire autour de cet axe. Soit α la position qu'occupe au même instant un point du solide situé à une distance r de l'axe M′N′ ; α' sa position au bout d'un intervalle de temps dt ; α vient en α' 1° par une translation $\alpha\alpha'' = udt$ parallèle à M′ N′. 2° par une rotation ωdt autour de M′N′, rotation qui lui imprime un déplacement élémentaire, $\alpha''\alpha' = \omega\, rdt$, perpendiculaire à M′N′ (voir n° 16) ; $\alpha\alpha'$ est le déplacement réel $v_\alpha\, dt$ du point α pendant le temps dt, v_α désignant la vitesse de ce point à l'instant considéré.

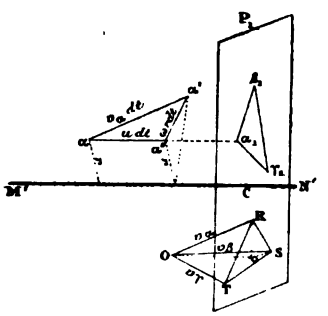

Fig. 66.

$\alpha'\alpha''$ étant perpendiculaire à M′N′, si on projette orthogonalement le triangle $\alpha'\alpha\alpha''$ sur cet axe, les projections des points α' et α'' sont confondues, et par suite la projection de $v_\alpha\, dt$ sur M′N′ est égale à la translation élémentaire udt, qui, étant parallèle à M′N′, se projette en vraie grandeur sur cette droite. On en déduit que

la projection de v_α sur M'N' est égale à u. Si d'ailleurs nous désignons par v_β, v_γ les vitesses à l'instant considéré de deux autres points β, γ, du solide, les projections de v_β, v_γ sur M'N' seront égales à u par la même raison.

Si donc nous menons par un point O de l'espace trois droites OR, OS, OT, respectivement égales à v_α, v_β, v_γ parallèles à ces vitesses, et dirigées dans le même sens, les perpendiculaires abaissées des points R, S, T, sur une parallèle Oo à M'N' tombent en un même point o, et par suite le plan P, passant par les points R, S, T est perpendiculaire à Oo. La direction de M'N', perpendiculaire au plan P, dont la position est déterminée, est donc elle-même déterminée.

Sa position est également déterminée. En effet, projetons en α_1, β_1, γ_1, les points α, β, γ, sur le plan P ; une translation udt perpendiculaire à P ne change pas α_1, β_1, γ_1; une rotation autour de M'N' les déplacera autour du point C d'intersection de cet axe avec P ; mais on sait que ce point C, qui est le centre instantané de rotation du système α_1, β_1, γ_1, est déterminé comme il a été dit au n° 16 ; le point C étant déterminé, la position de l'axe M'N' l'est également, ce qu'il fallait démontrer.

19. — Mouvement continu d'un solide dans l'espace. — Soit OO la position qu'occupe à un certain moment l'axe instantané de rotation et de glissement (fig. 67), $\alpha\alpha$ la position qu'il occupera au bout du temps dt ; aa la droite qui par la rotation et le glissement élémentaire autour de OO vient en $\alpha\alpha$.

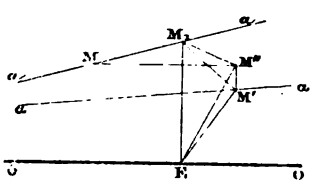

Fig. 67.

Les droites de l'espace telles que $\alpha\alpha$, qui, dans la suite du mouvement, deviendront successivement l'axe instantané de rotation et de glissement, ont pour lieu géométrique une certaine surface. Il en est de même des droites telles que aa qui, reliées invariablement au solide à l'instant considéré, viendront successivement coïncider avec les droites $\alpha\alpha$. Je dis que ces deux surfaces sont tangentes tout le long de l'axe OO.

Soit M un point quelconque de la droite aa, qui au bout du temps dt vient en M' sur la droite $\alpha\alpha$. Le mouvement élémentaire

de glissement et de rotation qui amène M en M′ peut être décomposé comme il suit : 1° une translation MM″ parallèle à OO ; 2° une rotation M″M′ autour de OO.

Menons le plan M″EM′ perpendiculaire à OO; soit M_1 le point ou ce plan rencontre aa. Le plan OOM_1 est tangent en E à la surface lieu des droites aa. Car il contient deux tangentes en E à cette surface : 1° l'axe OO situé sur cette surface et qui est à lui-même sa propre tangente ; 2° la droite M_1E qui a deux points d'intersection infiniment voisins M_1 et E avec la même surface. On verrait semblablement que le plan M′OO est tangent en E à la surface lieu des droites $\alpha\alpha$. D'autre part, le plan M_1EM' étant perpendiculaire à OO, l'angle M_1EM' mesure l'angle dièdre de ces deux plans tangents. Je dis que cet angle est infiniment petit.

En effet, M′M″ est égal à $\omega dt \times M'E$; M′E étant infiniment petit, M′M″ est infiniment petit du second ordre. D'autre part le triangle $MM''M_1$ est rectangle en M″, la droite MM″, parallèle à OO, étant perpendiculaire sur le plan $M'M''M_1$. On a donc $M''M_1 = MM'' \, tg M_1MM''$; MM″ est infiniment petit : l'angle M_1MM'' de la droite OO et de la position infiniment voisine aa de cette droite, est infiniment petit, et il en est de même de sa tangente ; $M''M_1$ est donc infiniment petit du second ordre. Donc, dans le triangle $M'M''M_1$, les côtés M′M″, $M''M_1$ étant tous deux infiniment petits du second ordre, le côté $M'M_1$, plus petit que la somme des deux autres, est aussi infiniment petit du second ordre. Donc enfin l'angle M_1EM' opposé à un côté infiniment petit du second ordre dans le triangle M_1EM' où les deux autres côtés sont du premier ordre, est un angle infiniment petit.

Donc les plans tangents en E aux deux surfaces considérées font entre eux un angle dièdre infiniment petit ; en d'autres termes ils se confondent.

D'ailleurs le point E est un point quelconque de l'axe OO. Donc les deux surfaces sont tangentes tout le long de l'axe instantané de rotation et de glissement.

Le mouvement du solide est donc engendré par le roulement et le glissement de la surface, lieu des droites telles que aa, supposée invariablement liée au corps solide, sur la surface fixe, lieu des droites telles que $\alpha\alpha$.

CHAPITRE IV

MOUVEMENT RELATIF

I. — Mouvement relatif d'un point. — Mouvement absolu, mouvement relatif, mouvement d'entraînement. — Relations entre les vitesses d'un point dans les trois mouvements. — Relations entre les accélérations. — Accélération complémentaire. — Accélération centrifuge composée.

§ II. — Mouvement relatif d'un solide invariable. — Composition des mouvements. — Composition de deux translations, — d'une translation et d'une rotation, — de deux rotations, — de deux mouvements quelconques.

§ Ier. — MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT

20. — Définitions. — Pour étudier le mouvement d'un point dans l'espace nous avons dit (voir n° 13) qu'on rapportait ses positions successives à des points de repère qui constituent un *système de comparaison*, généralement formé de trois axes ox, oy, oz. Si ce système est fixe, le mouvement du point est dit *mouvement absolu;* si le système se déplace, le mouvement du point par rapport à ce système est dit *mouvement apparent* ou *mouvement relatif*. Le mouvement du système de comparaison est dit *mouvement d'entraînement*. Nous allons chercher à déterminer le mouvement absolu d'un point, connaissant son mouvement relatif et le mouvement d'entraînemcnt du système de comparaison.

21. — Relation entre les vitesses dans les mouvements absolu, relatif et d'entraînement. — Proposons-nous d'abord de déterminer la vitesse dans le mouvement absolu connaissant les vitesses des mouvements relatif et d'entraînement.

Soit ox, oy, oz (fig. 68), la position qu'occupent à un certain moment trois axes de coordonnées formant le système de compa-

raison. Au bout d'un certain temps t ces axes sont venus en o'x', o'y', o'z'.

Soit M un point qui dans son mouvement relatif par rapport aux trois axes décrit une certaine trajectoire AB. En vertu du mouvement d'entraînement, AB vient au bout du temps t en A'B' et M vient en M'. Pendant le même temps, M vient de M' en M'' sur A'B', en vertu du mouvement relatif. Il est clair que M'' est la position finale de M.

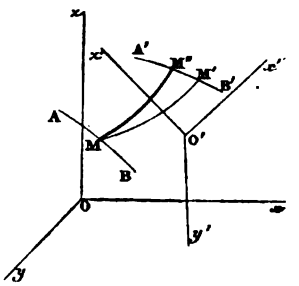

Fig. 68.

Supposons le temps t infiniment petit et égal à dt; soient v_a v_e v_r les vitesses de M dans les trois mouvements : absolu, d'entraînement et relatif. En négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs, les arcs élémentaires MM'', MM', M'M'' peuvent être remplacés par leurs cordes ayant respectivement pour valeurs : $MM'' = v_a dt$, $MM' = v_e dt$ et $M'M'' = v_r dt$; MM'' étant la résultante géométrique de MM' et de M'M'' (fig. 69), on voit que la **vitesse dans le mouvement absolu est la résultante géométrique de la vitesse dans le mouvement relatif et de la vitesse dans le mouvement d'entraînement.**

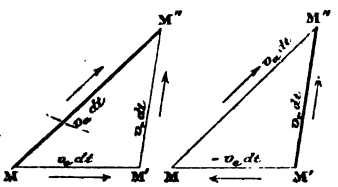

Fig. 69.

On voit d'ailleurs que M'M'' est la résultante géométrique de la vitesse M'M, égale et directement opposée à MM', et de MM'' (fig. 69). **Donc la vitesse dans le mouvement relatif est égale à la résultante géométrique de la vitesse absolue et d'une vitesse égale et contraire à la vitesse du mouvement d'entraînement.**

22. — Relation entre les accélérations. — Nous allons maintenant chercher à déterminer l'accélération dans le mouvement absolu, connaissant la vitesse et l'accélération dans le mouvement relatif et dans le mouvement d'entraînement. Nous nous appuierons sur la proposition démontrée au n° 14, à savoir que, si l'on considère un point M qui pendant le temps dt vient

Fig. 70.

de M en M′ (fig. 70) et si on mène suivant la tangente à la trajectoire MA $= vdt$, la direction et le sens de AM′ sont la direction et le sens de l'accélération, et celle-ci a pour valeur $2\frac{AM'}{dt^2}$.

Soit M un point, (fig. 71) AB sa trajectoire relative, MM′ sa trajectoire dans le mouvement d'entraînement. Au bout d'un temps dt un point, se mouvant sur la tangente à la trajectoire absolue avec une vitesse égale à la vitesse absolue, sera, en vertu du n° 21, parvenu en T, sommet opposé à M d'un parallélogramme dont les côtés sont MS $= v_r dt$, tangent à la trajectoire relative AB, et MR $= v_e dt$, tangent à la trajectoire du mouvement d'entraînement MM′; car on sait que la vitesse absolue est la résultante géométrique des vitesses relative et d'entraînement.

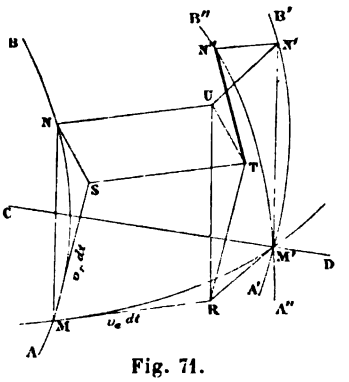

Fig. 71.

D'autre part quelle sera la position de M au bout du temps dt? La trajectoire AB aura subi un certain mouvement qui peut se décomposer comme il suit (voir n° 18) : 1° translation égale et parallèle à MM′; 2° rotation autour d'un axe instantané CD passant par M′. Le premier mouvement amène AB en A′B′, le second amène A′B′ en A″B″. Soit N la position qu'en vertu de son mouvement relatif M occupe sur AB au bout du temps dt; N vient en N′ sur A′B′ et en N″ sur A″B″; N″ est évidemment la position finale de M; donc, en vertu de ce que nous avons dit en commençant, la direction et le sens de TN″ sont la direction et le sens de l'accélération absolue, et la grandeur de cette accélération est $2\frac{TN''}{dt^2}$.

Joignons NS et menons TU égal et parallèle à NS. Joignons UN′, N′N″; TN″ est la résultanle géométrique de TU, UN′, N′N″. donc $2\frac{TN''}{dt^2}$ est la résultante géométrique de $\frac{2\,TU}{dt^2}$, $\frac{2\,UN'}{dt^2}$, $\frac{2\,N'N''}{dt^2}$; mais $\frac{2\,TU}{dt^2}$ est égal à $\frac{2\,SN}{dt^2}$ c'est-à-dire à l'accélération dans le mouvement relatif: d'autre part si nous menons MN, UR, M′N′, ces trois droites sont égales et parallèles; donc UR M′N′ est un parallélogramme; donc UN′ est égal à RM′ en grandeur direction et sens; donc $\frac{2\,UN'}{dt^2}$ est égal à $\frac{2\,RM'}{dt^2}$ c'est-à-dire à l'accélération dans le mouve-

ment d'entraînement. Quant à la quantité $\frac{2\,NN''}{dt^2}$ on lui donne le nom d'*accélération complémentaire*.

En résumé, **l'accélération dans le mouvement absolu est la résultante géométrique de l'accélération dans le mouvement relatif, de l'accélération dans le mouvement d'entraînement et de l'accélération complémentaire.**

Voyons comment nous déterminons l'accélération complémentaire. Sa direction est celle de N'N'' (fig. 72) perpendiculaire sur le plan passant par N' et l'axe instantané CD (voir n° 17), ou en d'autres termes sur le plan déterminé par CD et MN', c'est-à-dire par l'axe instantané et la vitesse relative. Son sens est N'N'', c'est-à-dire le sens de la rotation autour de l'axe instantané de rotation. Sa grandeur est, avons-nous dit $\frac{2\,N'N''}{dt^2}$; or on a, en abaissant N'E, N''E perpendiculaires sur CD :

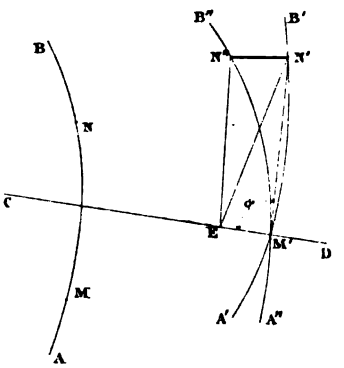

Fig. 72.

$$N'N'' = N'E \times \textit{angle}\ N'E\,N''$$

Le triangle N'EM' est d'ailleurs rectangle en E on a donc :

$$N'E = N'M' \sin N'M'E = v_r\, dt \sin \alpha$$

en désignant par α l'angle de la vitesse relative avec l'axe instantané de rotation. D'autre part l'angle N'EN'' est égal à ωdt en désignant par ω la vitesse de rotation autour de l'axe instantané. Donc on a :

$$N'N'' = \omega\, v_r \sin \alpha\, dt^2$$

$$\frac{2\,N'N''}{dt^2} = 2\,\omega\, v_r \sin \alpha$$

Telle est la valeur de l'accélération complémentaire. Elle s'annule dans les trois cas suivants :

1° $\omega = 0$; la rotation autour de l'axe instantané est nulle. Le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.

2° $v_r = 0$; la vitesse relative est nulle. Le point est en repos par rapport au système de comparaison.

3° $\alpha = 0$ l'axe instantané de rotation est tangent à la trajectoire relative.

Construisons le polygone OABC de composition des accélérations, OA étant l'accélération relative, AB l'accélération d'entraînement et BC l'accélération complémentaire; OC est l'accélération absolue. On voit que OA est la résultante de OC, CB égal et directement opposé à BC, et BA égal et directement opposé à AB. Donc **l'accélération relative est la résultante géométrique de l'accélération absolue, d'une accélération égale et contraire à l'accélération d'entraînement et d'une accélération égale et contraire à l'accélération complémentaire.** Cette dernière s'appelle *accélération centrifuge composée.*

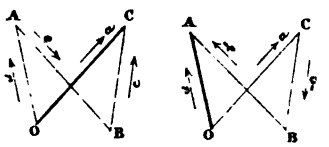

Fig. 73.

§ II. — MOUVEMENT RELATIF D'UN SOLIDE INVARIABLE COMPOSITION DES MOUVEMENTS

23. — Mouvement relatif d'un solide invariable. — Proposons-nous de déterminer le mouvement absolu d'un solide invariable, connaissant son mouvement relatif par rapport à un système de comparaison et le mouvement d'entraînement de ce système de comparaison.

Il résulte de ce qui a été dit au n° 21 que le déplacement élémentaire absolu d'un point quelconque s'obtiendra en donnant successivement à ce point les déplacements élémentaires correspondant au mouvement relatif et au mouvement d'entraînement. Le mouvement absolu du solide s'obtiendra donc en lui donnant successivement les mouvements relatif et d'entraînement. La recherche de ce mouvement absolu constitue la recherche de la composition des mouvements.

24. — Composition de deux translations — Dans chacun des déplacements élémentaires du solide, tous ses points décrivent suc-

cessivement des trajectoires égales et parallèles. Tous les déplacements élémentaires résultants sont aussi évidemment égaux et parallèles. Le mouvement résultant est donc une translation qui est la résultante géométrique des translations composantes.

25. — Composition d'une translation et d'une rotation. — Supposons d'abord l'axe de la rotation O perpendiculaire à la translation (fig. 74); soit ω vitesse angulaire de la rotation, v la vitesse de la translation. Soit O M la perpendiculaire abaissée d'un point O quelconque de l'axe sur la direction de v. Prenons sur cette droite un point M, tel que l'on ait : $OM = \frac{v}{\omega}$ et placé de manière que la rotation et la translation lui impriment des mouvements de sens inverses. La translation élèvera M perpendiculairement à OM d'une longueur vdt. La rotation l'abaissera dans la même direction d'une longueur $OM \times \omega dt = vdt$. Donc M ne bougera pas et le mouvement résultant sera une rotation autour d'un axe parallèle à O, passant par M.

Fig. 74.

Cherchons la vitesse angulaire de cette rotation. Le mouvement résultant du point O se réduit à la translation vdt. Si nous appelons d'ailleurs ω' la vitesse de rotation autour de l'axe M, le mouvement se confond avec la rotation résultante autour de M : $\omega' \times OM\, dt$. Donc :

$$v\, dt = \omega' \times OM\, dt$$

d'où :

$$\omega' = \frac{v}{OM} = \omega$$

La rotation résultante a donc même vitesse que la rotation composante. Il est aisé de voir qu'elle a même sens, en observant que le mouvement de O doit se réduire à la translation vdt.

Si la translation n'était pas perpendiculaire sur l'axe de rotation, on la décomposerait en deux translations composantes, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à cet axe ; cette dernière, composée avec la rotation donne une rotation autour d'un axe parallèle au premier ; le mouvement se compose donc d'une rotation autour

d'un axe et d'une translation parallèle à cet axe; c'est un mouvement héliçoïdal.

26. — Composition de deux rotations. — Supposons d'abord que les axes AB, AC des deux rotations se rencontrent. Soient ω, ω' les vitesses des deux rotations. Portons sur AB et AC des longueurs $AL = \omega$, $AM = \omega'$, telles, que pour deux observateurs ayant les pieds en A la tête en L et en M, les deux rotations aient lieu dans le même sens, dans le sens des aiguilles d'une montre par exemple (fig. 75).

Je dis que le mouvement résultant est une rotation autour de AD, diagonale du parallélogramme ALDM avec une vitesse angulaire égale à AD. En effet, dans le mouvement résultant A est fixe; D l'est aussi, car la rotation autour de AB amène ce point en arrière du tableau d'une longueur $\omega\, dt \times DH$ et la rotation autour de A C l'amène en avant du tableau d'une longueur $\omega' dt \times D\,K$ (D H et DK sont les perpendiculaires abaissées de D sur les deux axes). Or, les deux triangles ALD, AMD étant égaux et de même surface, on a :

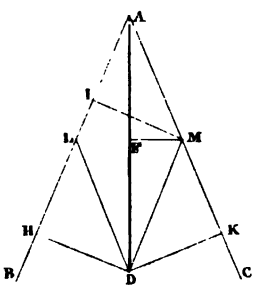

Fig. 75.

$$AL \times DH = AM \times DK$$

c'est-à-dire :

$$\omega \times DH = \omega' \times DK$$

Les deux déplacements sont donc égaux; ils sont de même direction et de sens inverses. Donc le point D ne bouge pas. Donc dans le mouvement résultant le solide s'est déplacé de telle sorte que deux de ses points A et D sont restés fixes. En d'autres termes le solide a exécuté une rotation autour de la droite fixe A D.

Pour déterminer la vitesse angulaire de la rotation résultante, nous remarquerons que le mouvement du point M de la droite A C est le même en vertu des deux rotations autour de A B et de A D. Abaissons M F et M I perpendiculaires sur ces deux axes; si nous appelons ω'' la vitesse de rotation autour de A D, nous avons :

$$\omega'' \times MF = \omega \times MI$$

Mais d'autre part, on a, en égalant deux expressions de la surface du parallélogramme AMDL :

$$AD \times MF = AL \times MI = \omega \times MI = \omega'' \times MF$$

Donc $AD = \omega''$. Il est aisé d'ailleurs de voir que pour un observateur les pieds en A, la tête en D, le mouvement est en sens direct (sens des aiguilles d'une montre).

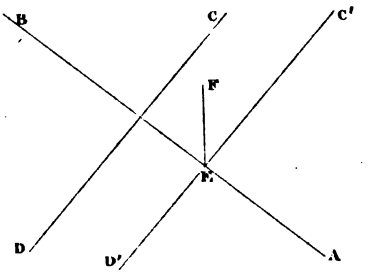

Fig. 76.

Si les deux axes AB et CD ne se rencontrent pas, par un point E de AB (fig. 76), nous menons C'D' parallèle à CD. Décomposons la rotation (CD) en une rotation (C'D') et une translation perpendiculaire au plan (CD, C'D') (voir n° 25). Les rotations (C'D') et (AB) nous donnent une rotation (EF) que nous composons avec la translation, qui est perpendiculaire au plan (CD, C'D'), mais non à EF.

Nous avons vu (n° 25) que le mouvement résultant est un mouvement héliçoïdal.

27. — Composition de deux mouvements quelconques. — Nous savons (voir n° 18) que les deux mouvements élémentaires sont héliçoïdaux, c'est-à-dire composés d'une rotation et d'une translation parallèle à l'axe de rotation ; composons les deux rotations : nous avons une rotation et une translation ; en y joignant les deux premières translations, nous avons une rotation et trois translations ; celles-ci nous donnent une translation résultante ; nous avons donc une rotation et une translation, ce qui nous donne en dernière analyse un mouvement héliçoïdal.

LIVRE II

STATIQUE

CHAPITRE V

DES FORCES

§ I. — Relations entre le mouvement d'un point matériel et les forces qui lui sont appliquées. — Inertie de la matière. — Des forces. — Principe de l'égalité de l'action et de la réaction. — Principe de l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieur. — Mouvement d'un point matériel soumis à une force constante en grandeur et en direction. — Principe de l'indépendance des effets des forces agissant simultanément sur un point matériel. — Proportionnalité entre les forces et les accélérations qu'elles impriment à un même point matériel. — Masse. — Proportionnalité entre les masses de plusieurs points matériels et les accélérations que leur imprime une même force. — Deux forces agissant sur deux points matériels de masses différentes sont entre elles comme le produit des accélérations qu'elles leur impriment par les masses de ces points. — Unité de masse. — Quand un point se meut sous l'action d'une force constante ou variable, cette force est à chaque instant égale au produit de la masse du point par son accélération. — Poids correspondant à l'unité de masse.

§ II. — Composition des forces appliquées à un point matériel.

§ III. — Des travaux et des moments. — Travail d'une force. — Le travail de la résultante est égal à la somme algébrique des travaux des composantes.— Le travail d'une force correspondant à un déplacement résultant est égal à la somme des travaux correspondant aux déplacements composants. — Moment d'une force. — Relation entre le travail d'une force dont le point d'application tourne autour d'un axe fixe, et son moment par rapport à cet axe. — Théorème des moments.

§ I. — RELATIONS ENTRE LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL EN LES FORCES QUI LUI SONT APPLIQUÉES

28. — Nous avons dit, en commençant cette troisième partie, que la statique avait pour objet l'étude des forces dans le cas où elles ne déterminent aucun mouvement pour les corps auxquels elles sont appliquées.

Pour établir les conditions auxquelles doivent satisfaire les forces afin de ne déterminer aucun mouvement pour les corps auxquelles elles sont appliquées, il faut évidemment que nous connaissions avant tout les relations qui existent entre les forces et les mouvements des corps auxquels elles sont appliquées. La recherche de ces relations fait l'objet du présent paragraphe. Nous y traiterons seulement la question dans le cas où les forces sont appliquées à un *point matériel*, c'est-à-dire à une certaine quantité de matière dont le volume est supposé réduit à celui d'un point mathématique.

29. — Inertie de la matière. — Ainsi que nous l'avons déjà dit, on admet que la matière est *inerte*, c'est-à-dire qu'elle ne peut modifier par elle-même son état de repos ou de mouvement.

Pour préciser davantage, il faut entendre par là qu'un point matériel, par exemple, ne peut de lui-même modifier sa vitesse ; si cette vitesse est nulle, elle reste nulle : le point abandonné à lui-même étant en repos reste en repos. Si cette vitesse a une grandeur et une direction déterminées, cette grandeur et cette direction restent constantes. Le mouvement du point est par suite rectiligne et uniforme.

30. — Forces. — On donne le nom de *force* à tout agent extérieur à un système matériel, capable de faire varier en grandeur et en direction les vitesses des points de ce système, ou, en d'autres termes, de leur imprimer des accélérations (voir n° 9).

On définit l'égalité des forces par l'égalité de leurs effets. On dit que deux forces sont égales, quand, appliquées pendant le même temps, à partir du repos, à un même point matériel, elles impriment à ce point des déplacements égaux.

On attribue à une force une direction et un sens, qui sont la direction et le sens du déplacement qu'elles impriment à un point matériel auquel elles sont appliquées à partir du repos.

On dit qu'une force est 2, 3... n fois plus grande qu'une autre quand elle est formée par la réunion de 2, 3... n forces égales à cette autre en grandeur, direction et sens.

On évalue les forces en nombres, en comparant leur action a

celle de la pesanteur. On dit qu'une force est de 2, 3... n kilogrammes, quand, appliquée dans le sens de la pesanteur elle produit le même effet qu'un poids de 2, 3... n kilogrammes.

31. — Principe de l'égalité de l'action et de la réaction. — Quand un point matériel A exerce sur un point matériel B une certaine force ou action F, on admet que le point B exerce de son côté sur le point A, une force appelée *réaction*, égale et directement opposée à F.

32. — Principe de l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieur du point sur lequel elle agit. — Soit M un point matériel (fig. 77) en mouvement sous l'action d'une force F. Pendant le temps t ce point vient de M en M'. Soit v la vitesse en M. Si la force F était brusquement supprimée quand le point est en M, ce point, en vertu de l'inertie, parcourrait pendant le temps t, sur la direction de la vitesse v, une longueur MA $= vt$. La droite AM' définit donc par sa grandeur et sa direction le déplacement du point dû à l'action de la force F pendant le même temps. La droite MM' est la résultante géométrique des deux droites MA, AM'.

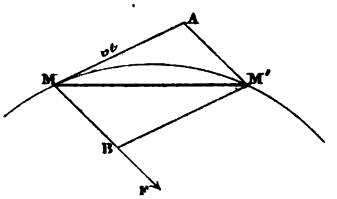

Fig. 77.

Le principe de l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieur, consiste en ce qu'on admet que le déplacement AM' dépend uniquement de la force F; quelle que soit la vitesse, v, ce déplacement est donc le même que si la force F agissait sur le point à partir du repos.

33. — Quand un point matériel se meut sous l'action d'une force constante ou variable, à chaque instant la direction de l'accélération du point est la même que celle de la force, et la grandeur de cette accélération dépend seulement de la grandeur de la force.

Appliquons le principe précédent à un point en mouvement sous l'action d'une force F pendant un temps infiniment petit dt.

Nous supposons que, pendant ce temps dt, le point considéré vient de M en M' (fig. 78).

Portons, sur la direction de la vitesse v en M, une longueur $MA = vdt$. Nous avons vu précédemment (voir n° 14) que la droite AM′ était dirigée suivant l'accélération j du mobile en M, et avait pour longueur $\frac{1}{2} j\, dt^2$.

D'ailleurs AM′ représente également le déplacement dû pendant le temps dt à l'action de la force F ; donc le déplacement dû à la force F pendant le temps dt est dirigé suivant l'accélération et a pour valeur $\frac{1}{2} j\, dt^2$. Mais en vertu du principe énoncé au n° précédent, ce déplacement est le même que si la force F agissait sur le point considéré à partir du repos. D'autre part, la force F peut être considérée comme constante en grandeur et en direction pendant le temps infiniment petit dt ; l'accélération j, dirigée suivant AM′, a donc la même direction que le déplacement imprimé au point par la force F agissant à partir du repos, c'est-à-dire la même direction que la force F elle-même (voir n° 30), et sa valeur, égale à $2\frac{AM'}{dt^2}$, dépend uniquement de la longueur AM′, c'est-à-dire de la grandeur de la force F, ce qu'il fallait démontrer.

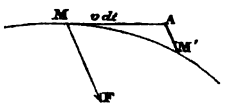

Fig. 78.

34. — Le mouvement d'un point matériel soumis à une force constante agissant à partir du repos ou dans la direction de la vitesse initiale, est rectiligne et uniformément varié. — En effet le mouvement est évidemment rectiligne, tous les déplacements élémentaires du point ayant constamment la même direction. L'accélération totale se confond donc avec l'accélération tangentielle (voir n° 10). Celle-ci est par suite constante puisqu'elle ne dépend que de la force, laquelle est supposée constante, et le mouvement est uniformément varié.

35. — La trajectoire d'un point matériel soumis à une force constante agissant dans une direction autre que celle de la vitesse initiale, est une parabole. — En effet soit MA la direction de la vitesse initiale v_0 (fig. 79), MB la direction de la force constante F, j l'accélération que cette force imprime au point matériel considéré ; en vertu du n° 33, l'accélération j est dirigée suivant MB, et sa grandeur dépend uniquement de la grandeur de F. La position M′

du point mobile à un instant quelconque t compté à partir du moment initial où il se trouve en M, s'obtiendra, en vertu du principe de l'indépendance de l'effet de la force F et du mouvement antérieur, en portant sur MA une longueur $MA = v_0 t$ et sur AM', parallèle à MB, une longueur AM' égale au déplacement du point dans le mouvement uniformément accéléré qui lui imprime la force F agissant sur lui à partir du repos. Ce déplacement (voir l'équation 3 du n° 11) a pour valeur $\frac{1}{2} j t^2$.

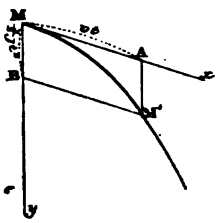

Fig. 79.

On voit que le point se déplace dans le plan déterminé par les droites MA, MB; rapportons la trajectoire à ces deux droites prises pour axe des coordonnées. Désignons par x l'abscisse MA du point M', par y son ordonnée MB. Nous avons :

$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{1}{2} j t^2$$

Éliminons t entre ces deux équations; nous avons:

$$t = \frac{x}{v_0}$$

Et par suite :

$$y = \frac{1}{2} j \frac{x^2}{v_0^2}$$

Cette équation représente une parabole ayant son axe parallèle à AB et tangente en M à MA (voir deuxième partie n° 18).

36. — Principe de l'indépendance des effets des forces agissant simultanément sur un point matériel. — Soit M la position qu'occupe à un certain moment un point matériel qui se déplace sous l'action de n forces F, F', F''... agissant simultanément sur lui; soit M' la position qu'il occupe au bout d'un certain temps t (fig. 80).

Le principe énoncé consiste en ce qu'on admet que la position du point M' ne change pas si à l'action simultanée des forces F, F', F''... appliquées pendant le temps t, on substitue les actions successives de chacune d'elles, appliquée séparément pendant le même temps sur le point considéré.

En d'autres termes, si M_1, M_2, M_3... sont les positions que prendrait le point M sous les actions respectives des forces F, F', F''... agissant séparément sur lui à partir du repos, et si on porte M A$= vt$ sur la direction de la vitesse en M, on admet que MM' est la résultante géométrique de MA, AB $=$ MM_1, BC $=$ MM_2, CM' $=$ MM_3...

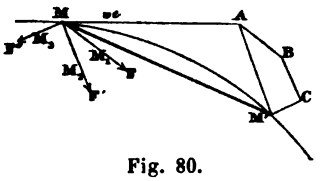

Fig. 80.

Par suite, la droite AM', qui définit le déplacement dû à l'action simultanée des forces F, F', F'',... pendant le temps t, est égale à la résultante géométrique des droites MM_1, MM_2, MM_3...

Dans le cas où MM_1, MM_2, MM_3... ont la même direction, leur résultante AM' est égale à leur somme.

37. — Deux forces sont proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment à un même point matériel. — Soient F, F' deux forces, j, j' les accélérations qu'elles impriment à un même point matériel. Considérons une force F_1 telle que l'on ait:

$$F = n F_1 \qquad F' = n' F_1$$

on a évidemment:

$$\frac{F}{F'} = \frac{n}{n'}$$

La force F_1, appliquée au point matériel considéré, lui imprime une certaine accélération j_1. Pendant un temps infiniment petit dt, la force F détermine pour ce point un déplacement dirigé suivant F et égal à $\frac{1}{2} j dt^2$ (voir n° 34). La force F_1, appliquée suivant la direction de F, déterminera un déplacement $\frac{1}{2} j_1 dt^2$; n forces égales à F_1, c'est-à-dire une force égale à F, agissant suivant la même direction imprimeront n déplacements égaux à $\frac{1}{2} j_1 dt^2$, dirigés tous suivant F. Les n déplacements se composent suivant un déplacement résultant égal à leur somme, c'est-à-dire à $n \times \frac{1}{2} j_1 dt^2$. En vertu du principe précédent, ce déplacement est égal à celui dû à l'action simultanée des n forces F_1, c'est-à-dire à l'action de la force F.

Donc on a :

$$\frac{1}{2} n \times j_1 \, dt^2 = \frac{1}{2} j \, dt^2$$
$$n j_1 = j$$

on verrait de même que l'on a :

$$n' j_1 = j'$$

on en déduit :

$$\frac{j}{j'} = \frac{n}{n'} = \frac{F}{F'}$$

Cette égalité démontre la proposition énoncée.

38. — **Masse.** — Deux points matériels soumis à une même force ne prennent pas nécessairement la même accélération. La cause de la différence des deux mouvements est ce qu'on appelle la différence des masses des points considérés.

On dit que deux points ont même *masse* lorsque, soumis à la même force, ils prennent des accélérations égales.

On dit qu'un point matériel a une masse double, triple... de celle d'un autre, quand il est formé de la réunion de 2, 3,.. points de même masse que cet autre.

39. — **Si deux forces agissant sur deux points de masses différentes leur impriment la même accélération, ces deux forces sont proportionnelles aux masses des deux points.** — Soient F et F' deux forces qui impriment une même accélération j à deux points matériels de masses m et m'; je dis qu'on a :

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'}$$

En effet, considérons un point de masse m_1, telle que l'on ait :

$$m = n \, m_1$$
$$m' = n' \, m_1$$

Soit F_1 une force qui communique l'accélération j à la masse m_1; juxtaposons n masses toutes égales à m_1, chacune d'elles étant actionnée par une force égale à F_1; elles prendront toutes la même accélération j.

Nous avons donc une masse totale égale à $n\,m_1$, c'est-à-dire à m, qui actionnée par n forces égales à F_1, c'est-à-dire par une force égale à $n\,F_1$, prend une accélération j, qui est précisément celle que communique la force F à cette même masse m. Donc la force $n\,F_1$, n'est autre que la force F:

$$F = n\,F_1$$

On verrait de même que l'on a:

$$F' = n'\,F_1$$

Donc

$$\frac{F}{F'} = \frac{n}{n'} = \frac{m}{m'}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

40. — Deux forces agissant sur deux points matériels de masses différentes, sont proportionnelles au produit de ces masses par les accélérations qu'elles leur communiquent. — Soient F et F' deux forces qui, agissant respectivement sur des points de masses m et m', leur communiquent des accélérations j et j'; je dis qu'on a :

$$\frac{F}{F'} = \frac{m\,j}{m'\,j'}$$

Considérons une force F'' qui, appliquée à un corps de masse m, lui imprime une accélération égale à j'. On a en vertu de la proposition démontrée au n° 37 :

$$\frac{F}{F''} = \frac{j}{j'}$$

On a d'autre part en vertu de la proposition démontrée au n° 39 :

$$\frac{F''}{F'} = \frac{m}{m'}$$

Multiplions membre à membre ces deux égalités en supprimant le facteur commun F''; nous avons :

$$\frac{F}{F'} = \frac{m\,j}{m'\,j'}$$

C'est ce qui fallait démontrer.

41. — Unité de masse. — On est convenu de prendre pour unité de masse, la masse qui, sous l'action d'une force égale à l'unité, prend une accélération égale à l'unité.

42. — Si dans l'égalité précédente nous avons $F = 1$ et $j' = 1$, il en résulte $m' = 1$; et par suite on a :

$$F = m j$$

Cette égalité montre qu'une force F est égale au produit de la masse d'un point matériel quelconque, multipliée par l'accélération que cette force, supposée appliquée à ce point, lui imprime, accélération qui, en vertu de ce que nous avons établi au n° 33, ne dépend que de cette force et est indépendante du mouvement antérieur du point considéré. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Quand un point matériel se meut sous l'action d'une force constante ou variable, cette force est à chaque instant égale au produit de la masse de ce point par son accélération à l'instant considéré.

43. — Poids correspondant à l'unité de masse. — Si la force F est la pesanteur, j est égal à l'accélération g due à la pesanteur :

$$g = 9{,}8088...$$

Si nous prenons pour unité de poids le kilogramme, nous avons pour poids P correspondant à une masse $m = 1$:

$$P = mg = 1 \times g = 9^{k}.8088...$$

§ II. — COMPOSITION DES FORCES APPLIQUÉES A UN POINT MATÉRIEL

44. — Quand un point matériel se meut sous l'action de plusieurs forces, on peut à chaque instant, sans changer le mouvement du point, remplacer les forces considérées par une seule, qui est la résultante géométrique des forces données, au moment considéré. — Supposons qu'à un certain moment les forces F, F', F'' soient appliquées au point M (fig, 81) ; sous leur action pendant le temps dt, le point M

vient en M'. En vertu du principe de l'indépendance des effets des forces (n° 36), nous obtiendrons le point M' en portant d'abord, suivant la tangente à la trajectoire, MA $= vdt$, puis AB, BC, CM', respectivement égaux en grandeur direction et sens aux déplacements imprimés au point M par les forces F, F', F'', agissant sur lui à partir du repos. On sait que les directions et sens de ces déplacements sont ceux des accélérations j, j', j'', imprimées respectivement au point M par les forces F, F', F'', et que leurs longueurs ont pour valeurs :

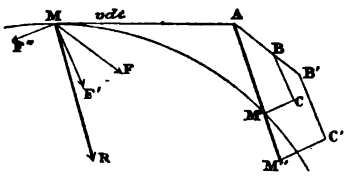

Fig. 81.

$$AB = \frac{1}{2} j\, dt^2 \qquad BC = \frac{1}{2} j'\, dt^2 \qquad CM' = \frac{1}{2} j''\, dt^2$$

Si d'ailleurs nous menons la droite AM', nous savons que cette droite a pour direction et sens les direction et sens de l'accélération totale j_1 du point M', et pour longueur :

$$AM' = \frac{1}{2} j_1\, dt^2 \tag{1}$$

Les directions et sens de AB, BC, CM' sont d'ailleurs ceux des forces F, F', F''. Construisons un polygone AB'C'M'' semblable au polygone ABCM' et ayant avec celui-ci ses côtés dans le rapport $\frac{2m}{dt^2}$; on aura :

$$AB' = AB \times \frac{2m}{dt^2} = mj = F$$

$$B'C' = BC \times \frac{2m}{dt^2} = mj' = F'$$

$$C'M'' = CM' \times \frac{2m}{dt^2} = mj'' = F''$$

et par suite :

$$AM'' = AM' \times \frac{2m}{dt^2} = mj_1$$

Si nous considérons une force $R = mj_1$, ayant même direction et même sens que j_1, nous voyons que sous son action le point M vient en M' à cause de l'équation (1), et que d'ailleurs cette force, qui est égale AM'', est la résultante géométrique des forces F, F', F''. C'est ce qu'il fallait démontrer.

La force R s'appelle la *résultante*. Les forces F, F', F''... sont les *composantes*.

45. — Nous avons vu au n° 8 que la projection d'une résultante géométrique sur un axe est égale à la somme algébrique des projections des composantes sur le même axe. Cette proposition, en vertu de ce que nous venons de voir, s'applique évidemment aux résultantes des forces.

Soient F', F'', F''', les composantes. Si nous les projetons sur trois axes de coordonnées ox, oy, oz, et si nous désignons par X', X'', X''' leurs projections sur l'axe des x, par Y' Y'' Y''' leurs projections sur l'axe des y par Z' Z'' Z''' leurs projections sur l'axe des z, nous avons, en désignant par X, Y, Z, les projections MA, MB, MC de la résultante MG $= R$ sur les trois axes (fig. 82) :

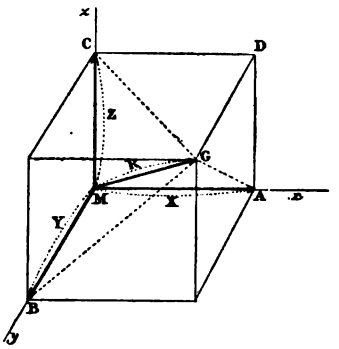

Fig. 82.

$$X = X' + X'' + X'''$$
$$Y = Y' + Y'' + Y'''$$
$$Z = Z' + Z'' + Z'''$$

Si les axes sont rectangulaires, nous avons (voir n° 7) :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad (1)$$

et

$$\cos(X, R) = \frac{X}{R} \quad \cos(Y, R) = \frac{Y}{R} \quad \cos(Z, R) = \frac{Z}{R} \qquad (2)$$

L'équation (1) fait connaître la grandeur de la résultante : les équations (2) déterminent les angles que cette résultante fait avec les axes de coordonnées, c'est-à-dire sa direction et son sens.

§ III. — DES TRAVAUX ET DES MOMENTS

46. — Travail d'une force. — Soit F une force (fig. 83), MM' le chemin parcouru par son point d'application M pendant un temps

infiniment petit dt. On appelle *travail élémentaire de la force F pendant le temps dt* le produit de l'intensité de la force F par la projection orthogonale de MM' sur sa direction. En désignant par $d\,\mathcal{T}\,F$ ce travail élémentaire, e par ds le déplacement élémentaire MM' du point M, on a :

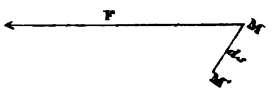

Fig. 83.

$$d\,\mathcal{T}\,F = F\,ds\cos(F, ds)$$

Le signe de $d\,\mathcal{T}\,F$ est celui de $\cos(F, ds)$. Le travail est donc positif ou négatif, suivant que l'angle (F, ds) est aigu ou obtus.

On appelle *travail d'une force pendant un temps fini*, la somme ou intégrale des travaux élémentaires pendant ce même temps. En appelant $\mathcal{T}\,F$ ce travail on a :

$$\mathcal{T}\,F = \int_{t_0}^{t} F\,ds\cos(F, ds)$$

47. — Quand plusieurs forces sont appliquées à un même point, le travail élémentaire de la résultante est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires des composantes.

En effet, soit R la résultante, F, F', F''... les composantes. On a vu au n° 45 que la projection de R sur une direction quelconque est égale à la somme des projections de F, F', F''... sur la même direction. Projetons en particulier $R, F, F'\,F''$... sur la direction du déplacement ds du point d'application de ces forces ; on a :

$$R\cos(R, ds) = F\cos(F, ds) + F'\cos(F', ds) + F''\cos(F'', ds) + \ldots$$

multiplions par ds les deux membres de cette égalité ; il vient :

$$R\,ds\cos(R, ds) = F\,ds\cos(F, ds) + F'\,ds\cos(F', ds) + F''\,ds\cos(F'', ds) + \ldots$$

ou :

$$d\,\mathcal{T}\,R = d\,\mathcal{T}\,F + d\,\mathcal{T}\,F' + d\,\mathcal{T}\,F'' + \ldots$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

48. — Soit ds le déplacement d'un point matériel auquel est appliquée une force F. Si on donne au même point matériel une série de déplacements $d\sigma$, $d\sigma'$, $d\sigma''$..., dont ds soit la résultante géométrique. le travail de la force F correspondant au déplacement ds est égal à la somme des travaux de la même force correspondant aux déplacements $d\sigma$, $d\sigma'$, $d\sigma''$...

En effet, projetons sur la direction de la force F les déplacements ds, $d\sigma$, $d\sigma'$, $d\sigma''$,... La projection du déplacement résultant ds est égale à la somme algébrique des projections des déplacements composants (voir n° 8); donc on a :

$$ds \cos (F, ds) = d\sigma \cos (F, d\sigma) + d\sigma' \cos (F, d\sigma') + d\sigma'' \cos (F, d\sigma'') + \ldots$$

En multipliant par F les deux membres de cette égalité, il vient :

$$F\, ds \cos (F, ds) = F\, d\sigma \cos (F, d\sigma) + F\, d\sigma' \cos (F, d\sigma') + F\, d\sigma'' \cos (F, d\sigma'') + \ldots$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

49. — Moment d'une force. — On appelle *moment d'une force par rapport à un axe*, le produit de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe, par la distance de cette projection à l'axe. Soit O un axe perpendiculaire au plan de la figure (fig. 84); P la projection d'une force F sur le plan de la figure ; O B $= p$ la perpendiculaire abaissée de O sur P; le moment de la force F par rapport à l'axe O est le produit Pp. On donne à ce moment une valeur positive, lorsque la force F tend à faire tourner son point d'application autour de l'axe O dans un sens convenu pour un observateur couché le long de cet axe, les pieds en O et la tête dans une direction positive convenue sur cet axe. Si la force F tend à faire tourner son point d'application en sens inverse, le moment est négatif.

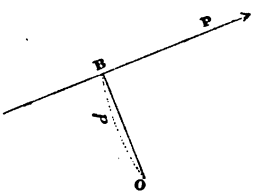

Fig. 84.

On représente le moment par une longueur dite *axe du moment* égale au moment en valeur absolue et portée sur l'axe O à partir d'une origine déterminée, dans un sens ou dans l'autre, suivant que le moment est positif ou négatif.

50. — Le travail élémentaire d'une force, dont le point d'application tourne autour d'un axe, est égal au produit du moment de cette force par rapport à l'axe de rotation, multiplié par l'angle de la rotation élémentaire. — Soit F la force, O l'axe de rotation, supposé

perpendiculaire au plan de la figure (fig. 85). Supposons que le point M d'application de F se déplace et vienne en M′ en tournant d'un angle $d\alpha = \mathrm{M\,O\,M'}$ autour de l'axe O; nous compterons l'angle α positivement dans le sens des moments positifs indiqué par la flèche, et négativement en sens contraire. Désignons par $d\,\mathcal{T}\,F$ le travail élémentaire correspondant de F et par $\mathcal{M}_o\,F$ le moment de F par rapport à l'axe O. Je dis qu'on a :

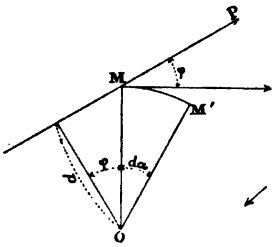

Fig. 85.

$$d\,\mathcal{T}\,F = \mathcal{M}_o\,F \times d\,\alpha$$

En effet soit P la projection de F sur le plan de la figure; nous pouvons décomposer la force F en deux composantes dont l'une sera P et dont l'autre sera perpendiculaire au plan de la figure; cette dernière sera perpendiculaire au déplacement $\mathrm{MM'} = ds$ de son point d'application, car MM′ est situé dans le plan de la figure. Donc le travail élémentaire de cette composante est nul. Donc le travail élémentaire de F, qui est (n° 47) égal à la somme des travaux élémentaires des deux composantes, est égal au travail de P, et l'on a :

$$d\,\mathcal{T}\,F = P \times \mathrm{MM'} \cos\varphi = P\,ds \cos\varphi$$

mais on a :

$$ds = \mathrm{O\,M} \times d\,\alpha$$

donc :

$$d\,\mathcal{T}\,F = P \times \mathrm{O\,M} \cos\varphi \times d\,\alpha$$

mais :

$$\mathrm{O\,M} \cos\varphi = p$$

donc :

$$d\,\mathcal{T}\,F = P\,p\,d\,\alpha = \mathcal{M}_o\,F \times d\,\alpha \qquad (1)$$

C'est ce qu'il fallait démontrer; $d\,\mathcal{T}\,F$ est positif ou négatif suivant que la force P fait avec MM′ un angle φ aigu ou obtus (n° 46). L'angle φ sera aigu quand la force P tendra à faire tourner le point M dans le sens de son mouvement effectif, et obtus quand la force P tendra à faire tourner le point M en sens contraire de

son mouvement effectif. Dans le premier cas, $\mathcal{M}_o\ F$ et $d\alpha$ seront de mêmes signes, puisque nous comptons les moments et les angles positivement dans le même sens; le produit $\mathcal{M}_o\ Fd\alpha$ sera donc positif, c'est-à-dire de même signe que $d\ \mathcal{T}\ F$. Dans le second cas $\mathcal{M}_o\ F$ et $d\alpha$ seront de signes contraires; le produit $\mathcal{M}_o\ Fd\alpha$ sera négatif et par suite encore de même signe que $d\ \mathcal{T}\ F$. L'égalité (1) ci-dessus est donc bien exacte dans tous les cas.

51. — Théorème des moments. — Quand plusieurs forces sont appliquées à un même point, le moment de la résultante par rapport à un axe quelconque est égal à la somme algébrique des moments des composantes par rapport au même axe.

Soient F, F', F''... les forces données, R leur résultante. Donnons au point d'application M un déplacement MM', par une rotation $d\alpha$ autour de l'axe par rapport auquel on prend les moments. On sait (n° 47) que le travail élémentaire de la résultante est égal à la somme des travaux élémentaires des composantes :

$$d\ \mathcal{T}\ R = d\ \mathcal{T}\ F + d\ \mathcal{T}\ F' + \mathcal{T}\ d\ F'' + \ldots$$

mais en vertu de la proposition démontrée au numéro précédent :

$$d\ \mathcal{T}\ R = \mathcal{M}_o\ R\ d\ \alpha,\ d\ \mathcal{T}\ F = \mathcal{M}_o\ F\ d\ \alpha,\ d\ \mathcal{T}\ F' = \mathcal{M}_o\ F'\ d\ \alpha$$
$$d\ \mathcal{T}\ F'' = \mathcal{M}_o\ F''\ d\ \alpha$$

donc :

$$\mathcal{M}_o\ R\ d\ \alpha = \mathcal{M}_o\ F\ d\ \alpha + \mathcal{M}_o\ F'\ d\ \alpha + \mathcal{M}_o\ F''\ d\ \alpha + \ldots$$

Et en divisant par $d\alpha$:

$$\mathcal{M}_o\ R = \mathcal{M}_o\ F + \mathcal{M}_o\ F' + \mathcal{M}_o\ F'' + \ldots$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

CHAPITRE VI

CONDITIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE

§ I. — Équilibre d'un point matériel. — Définition de l'équilibre — Conditions d'équilibre d'un point matériel libre. — Conditions d'équilibre d'un point matériel soumis à des liaisons.

§ II. — Équilibre d'un système de points matériels. — Système de points matériels tous libres, — Système de points matériels assujettis à des liaisons. — Théorème des travaux virtuels

§ I. — ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL

52. — De l'équilibre. — On dit qu'un corps est *en équilibre* lorsque, sous l'action des forces qui lui sont appliquées, ce corps, étant en repos, reste en repos. Le but de l'étude de l'équilibre ou de la statique est de rechercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les forces appliquées à un point matériel ou à un système de points matériels pour que l'équilibre ait lieu.

Nous étudierons successivement les cas d'un point matériel libre et soumis à des liaisons, et d'un système de points matériels libres et soumis à des liaisons.

53. — Conditions d'équilibre d'un point matériel libre. — Dans ce cas la condition de l'équilibre est à peu près évidente. Il faut et il suffit que la résultante des forces appliquées au point matériel soit nulle.

La condition est nécessaire, car, si la résultante n'était pas nulle, le point se mettrait en mouvement sous son action.

La condition est suffisante, car, la résultante étant nulle, le mouvement de point est le même que s'il n'était soumis à aucune force; par suite étant en repos, il reste en repos en vertu du principe d'inertie.

Si le point et les forces sont rapportés à trois axes de coordonnées ox, oy et oz, la résultante étant nulle, ses projections sur les trois axes sont nulles; donc si on appelle ΣX, ΣY, ΣZ, les sommes des projections sur les trois axes des forces appliquées au point, on a (n° 45):

$$\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0 \quad \Sigma Z = 0$$

Telles sont les conditions d'équilibre d'un point matériel libre.

54. — Conditions d'équilibre d'un point matériel soumis à des liaisons. — On dit qu'un point matériel est soumis à des *liaisons*, lorsqu'il est soumis à des conditions qui rendent son mouvement différent de ce qu'il serait sous la seule influence de la vitesse et des forces qui lui sont directement appliquées. Les équations qui expriment ces conditions sont dites *équations de liaison.*

Un point soumis à une liaison peut être considéré comme libre si on ajoute aux forces directement appliquées à ce point une force convenablement choisie en grandeur et en direction. En effet soit M la position qu'occupe à l'instant t un point soumis à une liaison; à l'instant $t + dt$, M est en M'. Soit v sa vitesse en M. Sur la direction de cette vitesse, portons $MA = v\,dt$. La résultante R des forces directement appliquées au point M, imprime à ce point pendant le temps dt un déplacement AM_1 dirigé suivant cette résultante et égal à $\frac{1}{2}\frac{R}{m}dt^2$, m désignant la masse du point. Nous savons que M_1 est la position qu'occuperait le point M sous la seule action de sa vitesse v et de la résultante R (voir n° 32). Joignons M_1M'; cette droite représente le déplacement du point dû à l'action de la liaison pendant le temps dt. Si nous supposons appliquée au point M, outre la force R, une force F_1 dirigée suivant M_1M' et égale à $m \times \frac{2M_1M'}{dt^2}$, le mouvement du point M pendant le temps dt sera le même, en vertu de l'indépendance des effets des forces, que si ce point était supposé libre et soumis aux forces R et F_1. La force F_1 s'appelle *force de liaison.*

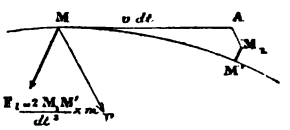

Fig. 86.

Nous ne considérerons ici que deux sortes de liaisons : 1° le point est assujetti à se mouvoir sur une courbe fixe; 2° il est assujetti à se mouvoir sur une surface fixe.

1° *Condition d'équilibre d'un point assujetti à se mouvoir sur une courbe fixe.*— La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre est que la résultante des forces directement appliquées au point soit normale à la courbe.

La condition est suffisante, car, si elle est remplie, il n'y a aucune raison pour que le point, étant en repos, se mette en mouvement dans un sens plutôt que dans un autre.

Elle est nécessaire, car, si elle n'est pas remplie, la résultante des forces directement appliquées au point pourra être décomposée en deux composantes : l'une tangente, l'autre normale à la courbe. La composante normale restera sans effet; la composante tangente à la courbe imprimera au point un déplacement suivant sa direction.

La condition d'équilibre étant remplie, si on suppose le point libre sous l'action simultanée de la résultante des forces qui lui sont directement appliquées, et de la force de liaison, ces deux forces doivent être égales et directement opposées. La force de liaison est par suite, quand l'équilibre a lieu, égale et directement opposée à la résultante des forces directement appliquées; elle est donc normale à la courbe comme cette résultante. C'est la *réaction normale* exercée par la courbe sur le point.

2° *Condition d'équilibre d'un point assujetti à se mouvoir sur une surface fixe.*—Par une suite de raisonnements semblables aux précédents, on démontrerait : 1° que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre ait lieu, est que la résultante des forces directement appliquées au point considéré soit normale à la surface; 2° que, lorsque l'équilibre a lieu, la force de liaison, ou réaction de la surface sur le point, est normale à la surface comme la résultante, directement opposée à cette force, et de même grandeur qu'elle.

§ II. — CONDITIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

55. — Conditions d'équilibre d'un système de points matériels tous libres. — Dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante

pour que le système soit en équilibre est que chaque point du système, pris séparément, soit en équilibre, c'est-à-dire que la résultante des forces appliquées en chaque point soit nulle.

La condition est évidemment suffisante : si chaque point du système, pris séparément, est en équilibre, le système est en équilibre. Elle est nécessaire : en effet, supposons le système en équilibre ; nous pouvons, sans troubler cet équilibre, supposer que nous fixons invariablement tous les points du système sauf un, qui reste libre sous l'influence des forces qui lui sont directement appliquées. Ce point étant en équilibre, la résultante des forces qui lui sont appliquées est nulle, et comme on peut répéter le même raisonnement pour tous les points du système, on voit que, lorsque l'équilibre a lieu, la résultante des forces appliquées en chaque point est nulle.

56. — Conditions d'équilibre d'un système de points matériels assujettis à des liaisons. — Ce cas peut être ramené au précédent en ajoutant les forces de liaison aux forces directement appliquées au système. Nous allons rechercher quelles sont ces forces de liaison, dans les deux cas suivants :

1° *Certains points du système sont assujettis à se mouvoir sur des courbes ou des surfaces fixes.* — Dans ce cas, nous avons vu que la force de liaison est en chaque point la réaction normale de la courbe ou de la surface sur laquelle le point doit se mouvoir.

2° *Certains points du système sont assujettis à rester deux à deux à des distances invariables les uns des autres.* — Cherchons quelles sont dans ce cas les forces de liaison. Soient A et B deux points assujettis à rester à une distance invariable l'un de l'autre. Nous les supposerons par exemple reliés par une tige rigide. Chacun des points exercera sur l'autre, par l'intermédiaire de cette tige, une force dirigée évidemment suivant A B ; ces deux forces seront égales et directement opposées, en vertu du principe d'égalité de l'action et de la réaction. Ces forces sont les forces de liaison appliquées en chacun des points A et B.

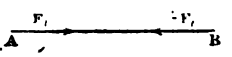

Fig. 87.

Il est aisé de voir que, dans les deux cas indiqués ci-dessus, les

travaux des forces de liaison sont nuls pour tout déplacement du système matériel compatible avec ces liaisons.

Soit en effet ds un déplacement arbitraire d'un point quelconque du système, compatible avec les liaisons du point. Soit F_1 la force de liaison qui s'exerce au point considéré. Le travail de la force F_1 correspondant au déplacement ds a pour expression :

$$d\,\mathcal{T}\,F_1 = ds\,F_1 \cos(ds, F_1)$$

Si le point considéré est assujetti à se mouvoir sur une courbe ou une surface fixe, F_1 est perpendiculaire à tout déplacement ds compatible avec les liaisons ; l'angle (ds, F_1) est droit, son cosinus est nul, et le travail de la force F_1 est nul.

Supposons maintenant que les points du système soient assujettis à rester deux à deux à des distances invariables les uns des autres. Les forces de liaison sont dans ce cas, nous venons de le voir, deux à deux égales et directement opposées. Nous allons montrer que les travaux de ces forces sont deux à deux égaux et de signes contraires.

En effet, soient A et B deux points du système (fig. 88) F_1, $-F_1$ les deux forces de liaison égales et directement opposées qui s'exercent suivant la direction A B sur les deux points A et B, pour les maintenir à une distance invariable l l'un de l'autre. Supposons que pendant un temps infiniment petit dt, A B vient en A′ B′. Soient $ds = \mathrm{AA'}$, $ds' = \mathrm{BB'}$ les déplacements des points A et B, α et α' les angles de ds et ds' avec la direction A B. La somme des travaux des forces F_1 et $-F_1$ a pour expression :

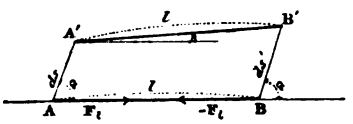

Fig. 88.

$$F_1\,ds \cos\alpha - F_1\,ds' \cos\alpha' = F_1\,(ds \cos\alpha - ds' \cos\alpha') \qquad (1)$$

On a d'ailleurs, en projetant sur A B le contour A A′ B′ B et en désignant par β l'angle infiniment petit que A′ B′ fait avec A B :

$$\mathrm{AB} = l = ds \cos\alpha + \mathrm{A'B'} \cos\beta - ds' \cos\alpha' = ds \cos\alpha + l \cos\beta - ds' \cos\alpha' \qquad (2)$$

Mais, l'angle β étant infiniment petit, on a :

$$\cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2}$$

et par suite :

$$l \cos \beta = l$$

en négligeant les infiniment petits du second ordre. L'égalité (2) devient donc :

$$l = ds \cos \alpha + l - ds \cos \alpha'$$

D'où on déduit :

$$ds \cos \alpha - ds' \cos \alpha = 0$$

Et par conséquent l'équation (1) nous montre que la somme des travaux des forces de liaison F_1, $-F^1$ appliquées en A et en B, est nulle.

Donc, si tous les points du système sont assujettis à rester deux à deux à des distances invariables les uns des autres, on voit que la somme des travaux des forces de liaison de tous les points du système est nulle pour un déplacement quelconque compatible avec ces liaisons.

Ceci posé, soit un système matériel dont les points sont ou libres ou assujettis à des liaisons rentrant dans celles que nous avons définies ci-dessus. Si aux forces F directement appliquées au système nous ajoutons les forces de liaison F_1 appliquées en chaque point, le système peut être considéré comme formé de points matériels tous libres. La condition d'équilibre est donc que la résultante R des forces appliquées en chaque point, en y comprenant les forces de liaison, soit nulle.

Si cette condition est satisfaite, les travaux des forces appliquées en chaque point du système, en y comprenant les forces de liaison, sont évidemment nuls pour tout déplacement, et en particulier pour tout déplacement compatible avec les liaisons ; il en est de même de la somme de ces travaux $\Sigma\, \mathcal{T} R$. Mais les travaux des résultantes R sont respectivement égaux aux sommes des travaux des composantes F et F_1 correspondant au même déplacement du système (voir n° 47). On a donc :

$$\Sigma\, \mathcal{T} F + \Sigma\, \mathcal{T} F_1 = 0$$

D'ailleurs nous avons vu plus haut que, pour tout déplacement compatible avec les liaisons, $\Sigma\, \mathcal{T} F_1$ était nul. Donc si l'équilibre a

lieu, la somme des travaux des forces F, directement appliquées au système, est nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons du système.

Réciproquement, si la somme des travaux des forces directement appliquées au système est nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons, le système est en équilibre. En effet, supposons qu'il en soit autrement et que, cette condition étant remplie, le système ne soit pas en équilibre ; il va dès lors se mettre en mouvement. Appliquons en chacun de ses points une force Q directement opposée à ce mouvement et dont la grandeur soit telle que le point considéré reste en repos. Le système sera en équilibre sous l'action des forces F et des forces Q, en tenant compte des liaisons. Donc, en vertu de ce que nous venons de démontrer plus haut, la somme des travaux des forces F et des forces Q sera nulle, pour tout déplacement compatible avec les liaisons :

$$\Sigma\, \mathcal{T} F + \Sigma\, \mathcal{T} Q = 0$$

Et comme la somme des travaux de F est nulle, on a pour tout déplacement compatible avec les liaisons :

$$\Sigma\, \mathcal{T} Q = 0$$

Parmi les déplacements, compatibles avec les liaisons, que nous pouvons donner au système, donnons-lui le déplacement que prend le système sous l'action des forces F. Les forces Q sont toutes directement opposées dans ce cas au déplacement de leurs points d'application. Leurs travaux sont tous négatifs. Leur somme ne peut dès lors s'annuler que si toutes les forces Q sont nulles, c'est-à-dire si le système est en équilibre sous l'action des forces extérieures et des liaisons. Donc, si la condition énoncée est remplie, l'équilibre a nécessairement lieu.

On donne le nom de *travail virtuel* au travail d'une force dont le point d'application reçoit un déplacement élémentaire arbitraire.

La condition d'équilibre d'un système de points matériels peut s'énoncer comme il suit :

Pour qu'un système matériel, libre ou soumis à des liaisons, soit

en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels des forces directement appliquées au système soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons.

On donne à cette proposition le nom de **théorème des travaux virtuels**. La condition d'équilibre énoncée est, on le voit, indépendante des forces de liaison, qui sont généralement inconnues.

CHAPITRE VII

ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES

§ I. — Conditions d'équilibre d'un corps solide. — Conditions d'équilibre d'un corps solide libre; — d'un corps solide soumis à des liaisons; — d'un solide assujetti à tourner autour d'un point fixe; — autour d'une droite fixe.

§ II. — Composition des forces appliquées à un corps solide. — Systèmes de forces équivalents. — Composition des forces concourantes; — des forces parallèles. — Des couples. — Moment d'un couple. — Composition des couples. — Composition des forces appliquées à un corps solide.

§ III. — Centre de gravité d'un corps solide. — Définition. — Recherche analytique du centre de gravité d'un solide quelconque. — Centre de gravité d'un volume homogène; — d'une surface; — d'une ligne. — Centres de gravité de quelques figures géométriques : ligne droite, triangle, trapèze, prisme et cylindre ; pyramide et cône. — Détermination analytique du centre de gravité d'une ligne, d'une surface ou d'un volume quelconque

§ I. — CONDITIONS D'ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE

57. — Équilibre d'un corps solide libre. — Nous avons vu dans le chapitre précédent quelles sont les conditions d'équilibre d'un système de points matériels libres ou assujettis à des liaisons. Parmi tous les systèmes de points matériels auxquels peuvent être appliquées les conditions trouvées, nous allons considérer celui qui est constitué par un corps solide. Nous supposerons d'abord le solide libre. Les forces de liaison du système ont alors pour effet d'en maintenir tous les points à des distances invariables les uns des autres. Nous savons que dans ce cas le théorème des travaux virtuels est applicable.

Ceci posé, soit A un point du solide (figure 89), F une des forces extérieures agissant sur le solide ; nous supposons la force F appliquée au point A. Cherchons les conditions auxquelles doivent satisfaire les forces telles que F pour que le solide soit en équilibre.

Nous savons que, pour que l'équilibre ait lieu, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons du système, c'est-à-dire pour tout déplacement du corps solide.

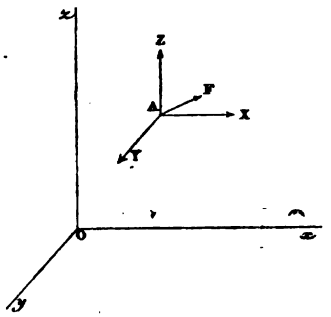

Fig. 89.

Soit o un point quelconque de l'espace, menons par ce point trois axes rectangulaires ox, oy, oz.

Supposons le point o invariablement lié au solide. Donnons au solide un déplacement élémentaire quelconque. Le point o prendra dans ce mouvement un certain déplacement δs. Nous avons vu précédemment (n° 18) que le déplacement élémentaire du solide pouvait être décomposé en une translation égale et parallèle au déplacement δs du point o et en une rotation élémentaire $\delta\theta$ autour d'un axe instantané de rotation passant par le point o.

La translation δs peut elle-même être décomposée en trois translations δx, δy, δz, suivant ox, oy, oz. La rotation $\delta\theta$ peut également être décomposée en trois rotations $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ autour des trois axes ox, oy, oz.

Décomposons la force F en trois composantes X, Y, Z, respectivement parallèles aux trois axes ox, oy, oz.

Nous devons exprimer que la somme des travaux des forces telles que F est nulle pour toutes les valeurs possibles de δs et de $\delta\theta$, c'est-à-dire de δx, δy, δz, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, et $\delta\gamma$.

Le travail de la force F correspondant au déplacement δs est égal (voir n° 47) à la somme des travaux de X, Y, Z, pour le même déplacement.

Le travail de X correspondant au déplacement δs est égal (voir n° 48) à la somme des travaux de X pour les déplacements δx, δy, δz. Mais X étant perpendiculaire à δy et δz, les travaux de X correspondant à ces deux déplacements sont nuls. Le travail de X pour le déplacement δs est donc égal au travail de X correspondant au déplacement δx, lequel est parallèle à X; ce travail est donc égal à $X\,\delta x$.

On verrait de même que les travaux de Y et de Z correspon-

dant au déplacement δs sont respectivement égaux à $Y\delta y$ et à $Z\delta z$. Le travail de la force F correspondant à la translation δs a donc pour expression :

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z$$

Le travail de F correspondant à la rotation $\delta\theta$ est égal à la somme des travaux de la même force correspondant aux rotations composantes $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ autour des axes ox, oy, oz.

Mais on sait que le travail élémentaire d'une force dont le point d'application tourne autour d'un axe s'obtient en multipliant la rotation élémentaire par le moment de la force par rapport à cet axe (n° 50).

Les travaux de F pour les rotations composantes $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, ont donc respectivement pour expression $\mathcal{M}_x F\,\delta\alpha$, $\mathcal{M}_y F\,\delta\beta$, $\mathcal{M}_z F\,\delta\gamma$, en désignant par $\mathcal{M}_x\,F$, $\mathcal{M}_y\,F$, $\mathcal{M}_z\,F$ les moments de la force F par rapport aux axes ox, oy et oz ; le travail de F pour la rotation résultante $\delta\theta$ a par suite pour expression :

$$\mathcal{M}_x\,F \times \delta\alpha + \mathcal{M}_y\,F \times \delta\beta + \mathcal{M}\;\;F \times d\gamma$$

Et par suite le travail élémentaire de la force F pour le déplacement élémentaire du solide est égal à la somme des travaux élémentaires de cette force par la translation élémentaire δs et la rotation élémentaire $\delta\theta$, c'est-à-dire à :

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + \mathcal{M}_x\,F \times \delta\alpha + \mathcal{M}_y\,F \times \delta\beta + \mathcal{M}_z\,F \times \delta\gamma$$

La somme de ces travaux pour toutes les forces telles que F doit être nulle, ce qui nous donne :

$$\delta x\;\Sigma X + \delta y\;\Sigma Y + \delta z\,\Sigma Z + \delta\alpha\,\Sigma\,\mathcal{M}_x\,F + \delta\beta\,\Sigma\,\mathcal{M}_y\,F + \delta\gamma\,\Sigma\,\mathcal{M}_z\,F = 0$$

Cette équation devant être vérifiée pour tout déplacement du solide, doit être vraie pour toute valeur de δx, δy, δz, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$; les coefficients de δx, δy, δz, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, doivent être tous nuls, ce qui donne en dernière analyse :

$$\Sigma\,X = 0 \quad \Sigma\,Y = 0 \quad \Sigma\,Z = 0$$

$$\Sigma\,\mathcal{M}_x\,F = 0 \quad \Sigma\,\mathcal{M}_y\,F = 0 \quad \Sigma\,\mathcal{M}_z\,F = 0$$

Telles sont les conditions d'équilibre d'un solide invariable. Si on remarque que les axes, ox, oy, oz sont choisis arbitrairement, on voit que pour qu'un solide soit en équilibre il faut et il suffit que les forces directement appliquées aient la somme de leurs projections nulle sur un axe quelconque et la somme de leurs moments nulle par rapport à un axe quelconque.

58. — Équilibre d'un corps solide soumis à des liaisons. — Nous examinerons successivement les deux cas où le corps solide est assujetti à tourner autour d'un point fixe, et autour d'une droite fixe.

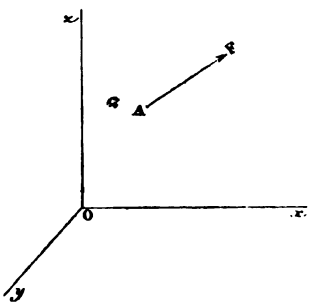

Fig. 90.

1° *Solide assujetti à tourner autour d'un point fixe.* — Soit o le point fixe (fig. 90). Nous savons que le mouvement élémentaire du solide compatible avec les liaisons, se réduit à une rotation élémentaire $\delta\theta$ autour d'un axe passant par o. Décomposons $\delta\theta$ en trois rotations composantes $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ autour de trois axes rectangulaires ox, oy, oz, menés par o; le travail pendant cette rotation d'une force F appliquée à un point A du solide, aura pour expression (voir n° 57) :

$$\delta\alpha\, \mathcal{M}_x\, F + \delta\beta\, \mathcal{M}_y\, F + \delta\gamma\, \mathcal{M}_z\, F$$

La somme de ces travaux pour toutes les forces telles que F doit être nulle :

$$\delta\alpha\, \Sigma\, \mathcal{M}_x\, F + \delta\beta\, \Sigma\, \mathcal{M}_y\, F + \delta\gamma\, \Sigma\, \mathcal{M}_z\, F = 0$$

Cette équation devant être vérifiée pour tout déplacement compatible avec les liaisons, doit être vraie quels que soient $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$. On doit donc avoir :

$$\Sigma\, \mathcal{M}_x\, F = 0 \quad \Sigma\, \mathcal{M}_y\, F = 0 \quad \Sigma\, \mathcal{M}_z\, F = 0$$

Et, comme les trois axes sont choisis arbitrairement, on voit que, pour que l'équilibre ait lieu, il faut et il suffit que la somme des moments des forces extérieures soit nulle par rapport à un axe quelconque passant par le point fixe.

Le point fixe o exerce sur le solide une pression que l'on appelle *la réaction du point fixe*, et qu'on peut aisément calculer. En effet, désignons par X_1, Y_1, Z_1, les composantes de cette réaction parallèlement aux trois axes ; le solide peut être considéré comme libre en adjoignant la réaction R aux forces extérieures telles que F. Les conditions générales d'équilibre trouvées dans le numéro précédent doivent être satisfaites ; ce qui nous donne :

$$X_1 + \Sigma X = 0 \quad Y_1 + \Sigma Y = 0 \quad Z_1 + \Sigma Z = 0$$

Ou

$$X_1 = -\Sigma X \quad Y_1 = -\Sigma Y \quad Z_1 = -\Sigma Z$$

On voit que la force R est égale et directement opposée à la résultante des forces telles que F, transportées parallèlement à elles-mêmes au point fixe o.

2° *Solide assujetti à tourner autour d'une droite fixe.* — Prenons la droite fixe pour axe des z (fig. 90). Le mouvement élémentaire du solide sera une rotation $\delta\gamma$ autour de oz. Le travail correspondant d'une force F appliquée en un point A du solide sera :

$$\delta\gamma\, \mathcal{M}_z\, F$$

La somme de ces travaux étant nulle, on aura :

$$\delta\gamma\, \Sigma\, \mathcal{M}_z\, F = 0$$

Cette équation devant être vraie pour toute valeur de $\delta\gamma$, on aura nécessairement :

$$\Sigma\, \mathcal{M}_z\, F = 0$$

La condition d'équilibre est donc que la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe fixe soit nulle.

§ II. — COMPOSITION DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE

59. — Systèmes équivalents de forces appliquées à un corps solide. — Appliquons à un corps solide un système de forces F, que nous désignerons par S (F) et un système de forces F_1 que nous dési-

gnerons par S (F_1). Si ces deux systèmes sont tels 1° que la somme des projections des forces F sur un axe quelconque soit égale à la somme des projections des forces F_1 sur le même axe et 2° que la somme des moments des forces F par rapport à un axe quelconque soit égale à la somme des moments des forces F_1 par rapport au même axe, on dit que les deux systèmes S (F) et S (F_1) sont équivalents.

60. — Si un solide est en équilibre sous l'action du système S (F) seul ou uni à d'autres forces, on ne troublera pas l'équilibre en remplaçant le système S (F) par le système équivalent S (F_1). — En effet, la somme des projections des forces appliquées au solide, par rapport à un axe quelconque, ne changera pas si on remplace le système S (F) par le système S (F_1). S'il est nul dans le premier cas, il le sera aussi dans le second cas et réciproquement. Il en sera de même pour la somme des moments par rapport à un axe quelconque des forces appliquées au solide.

61. — Si un solide est en équilibre sous l'action de deux systèmes de forces S (F) et S (F_1), le système S (F) est équivalent au système S (— F_1) des forces — F_1 respectivement égales de même direction et de sens contraires aux forces F_1. — En effet, l'équilibre ayant lieu sous l'action des systèmes S (F) et S (F_1) la somme des projections des forces F sur un axe quelconque est égale et de signe contraire à la somme des projections des forces F_1 sur le même axe. D'ailleurs, les forces — F_1 ont respectivement leurs projections égales et de signes contraires à celles des forces F_1. Donc la somme des projections des forces — F_1 et la somme des projections des forces F, respectivement égales et de signes contraires à la somme des projections des forces F_1, sont égales. Il en est de même de la somme des moments des forces — F_1 et F, pris par rapport à un axe quelconque. Donc enfin les deux systèmes S (F) et S $(-F_1)$ sont équivalents.

Il résulte de ce qui précède que, pour exprimer que deux systèmes S (F), S (F_1) appliqués à un solide, sont équivalents, il suffira d'exprimer que le solide est en équilibre sous l'action des systèmes S (F) et S $(-F_1)$.

62. — Composition des forces appliquées à un corps solide. — Étant donné un solide auquel est appliqué un système de forces F, on peut chercher le système équivalent le plus simple.

La solution de ce problème constitue ce qu'on appelle *la composition des forces* appliquées à un corps solide.

63. — Deux forces égales de même sens et dont les directions se confondent sont équivalentes. — En effet leurs projections (fig. 91) sur un axe quelconque et leurs moments par rapport à cet axe sont évidemment égaux. On voit donc qu'on peut, étant donnée une force F appliquée en un point A d'un solide, transporter son point d'application en un point quelconque B situé sur la direction de la force F.

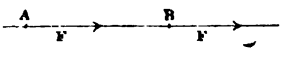

Fig. 91.

64. — Composition des forces concourantes. — Quand plusieurs forces F' F'' F''' sont concourantes, leur résultante R est équivalente au système de ces forces. — En effet la projection de la résultante R sur un axe quelconque est égale à la somme des projections des composantes F', F'', F''', sur le même axe, et le moment de la résultante R par rapport à un axe quelconque est égal à la somme des moments des composantes F', F'', F''', par rapport au même axe.

65. — Composition des forces parallèles. — A. — Le système de deux forces parallèles et de même sens F et F' appliquées en des points A et B est équivalent à une force unique R, parallèle et de même sens, égale en intensité à F + F' et appliquée en un point C de la ligne AB situé entre A et B et tel que l'on ait $\frac{AC}{CB} = \frac{F'}{F}$ (fig. 92). — Pour démontrer que la force R est équivalente au système des forces F et F', on sait (voir n° 61) qu'il suffit de faire voir que si on applique en C une force — R égale et directement opposée à R, le solide est en équilibre sous l'action des forces — R, F, et F'.

On a vu que, pour que l'équilibre ait lieu, il faut et il suffit que la somme des projections des forces — R, F et F' sur trois axes rectangulaires soit nulle et que la somme des moments des mêmes forces par rapport à ces trois axes soit également nulle.

Prenons pour axes la droite Cy dirigée suivant R, la droite Cx perpendiculaire à R dans le plan de la figure et la droite Cz perpendiculaire en C au plan de la figure.

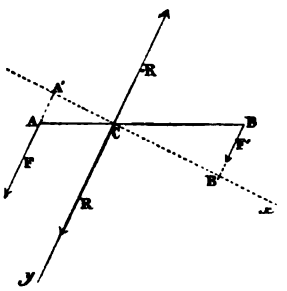

Fig. 92.

Les projections des trois forces sur les axes Cx et Cz sont nulles, les équations correspondantes sont donc satisfaites. Les trois forces $-R$, F et F' se projettent d'ailleurs en vraie grandeur sur Cy. R étant égal à $F + F'$ on a : $-R = -(F + F')$ et par suite $F + F' - R = 0$. On voit donc que la somme des projections des trois forces sur chacun des trois axes est nulle.

Les moments des trois forces par rapport aux axes Cx, Cy, situés dans leur plan, sont nuls, il en est de même de leur somme; les deux équations d'équilibre correspondantes sont donc satisfaites. D'ailleurs le moment de $-R$ par rapport à Cz est nul. Le moment de F est égal à $F \times CA'$. Le moment de F' est $-F' \times CB'$. La somme des trois moments par rapport à Cz est donc :

$$F \times CA' - F' \times CB'$$

mais on a :

$$\frac{CA'}{CB'} = \frac{CA}{CB} = \frac{F'}{F}$$

et par suite :

$$F \times CA' = F' \times CB' \text{ ou } F \times CA' - F' \times CB' = 0$$

Les six équations d'équilibre sont donc satisfaites, et l'on voit que les forces F, F', $-R$ se font équilibre; donc, la force R est équivalente au système des forces F et F', ce qu'il fallait démontrer.

B. — Le système de deux forces parallèles et de sens contraires F et F' appliquées en des points A et B est équivalent à une force unique R, parallèle à F et F', de même sens que la plus grande des deux en valeur absolue, égale en grandeur absolue à la différence F — F', et appliquée en un point C de la droite AB, non compris entre A et B, et tel que l'on ait $\frac{CA}{CB} = \frac{F'}{F}$ (fig. 93). — Nous allons démon-

trer, comme dans le premier cas, que si on désigne par $-R$ une force égale et directement opposée à R, les forces F, F' et $-R$ se font équilibre. Prenons trois axes rectangulaires : Cy suivant R, Cx perpendiculaire à Cy dans le plan de la figure, Cz perpendiculaire au plan de la figure. Projetons F, F', $-R$ sur les trois axes. Les projections des trois forces sur Cx sont nulles. Les projections des trois forces sur Cz sont nulles. Il en est de même de la somme des projections des trois forces sur ces deux axes. Les deux équations d'équilibre correspondantes sont donc satisfaites. Les trois forces se projettent d'ailleurs en vraie grandeur sur Cy. La somme de leurs projections, en supposant que nous les comptions positivement de C vers y, a pour valeur :

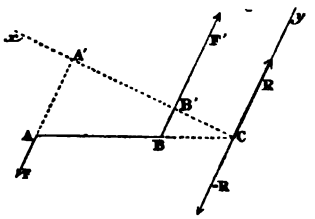

Fig. 93.

$$F' - F - R$$

mais nous avons :

$$R = F' - F$$

Donc :

$$F' - F - R = 0$$

L'équation d'équilibre correspondante est donc satisfaite.

Les moments des trois forces par rapport à Cx et Cy sont nuls. Les équations d'équilibre correspondantes sont donc satisfaites. Si nous prenons les moments par rapport à Cz, nous voyons que le moment de $-R$ est nul, le moment de F est $F \times CA'$, celui de F' est $-F' \times CB'$. La somme des moments des trois forces F, F', $-R$ par rapport à Cz est donc :

$$F \times CA' - F' \times CB'$$

Mais par hypothèse on a :

$$\frac{F'}{F} = \frac{CA}{CB} = \frac{CA'}{CB'}$$

Donc :

$$F' \times CB' = F \times CA'$$

et par suite :

$$F \times CA' - F' \times CB = 0$$

Les six équations d'équilibre sont donc satisfaites. $-R$ fait

équilibre au système des forces F et F'. Donc, R est équivalent au système F, F'.

66. — Des couples. — Si dans le second cas de composition des forces parallèles, que nous venons d'examiner, nous supposons que les forces parallèles et de sens contraires F, F', sont égales en grandeur absolue, la résultante R est nulle ; son point d'application C doit d'ailleurs satisfaire à la relation :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{F'}{F}$$

D'où on déduit :

$$\frac{CA}{CA - CB} = \frac{CA}{AB} = \frac{F'}{F' - F} = \frac{F'}{0}$$

Ce qui donne :

$$CA = \frac{F' \times AB}{0} = \infty$$

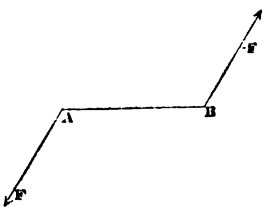

Fig. 94.

Le point C s'éloigne donc à l'infini sur la droite AB. La résultante est nulle et son point d'application est à l'infini. En d'autres termes, les forces F et $F' = -F$ (fig. 94), égales, parallèles et dirigées en sens contraires, n'admettent pas une résultante unique. L'ensemble de ces deux forces constitue ce que l'on appelle *un couple*.

67. — Moment d'un couple. — Le moment d'un couple par rapport à un axe quelconque est indépendant de la position de cet axe et ne dépend que de sa direction. — Cherchons d'abord quel est le moment d'un couple par rapport à un axe perpendiculaire au plan de ce couple. Soient F, $-F$ les deux forces égales et contraires qui composent le couple (fig. 95). AC, BD, représentent ces deux forces. Désignons par f le bras de levier du couple, c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire commune aux deux forces, comprise entre AC et BD. Soit O le pied d'un axe perpendiculaire au plan du couple. Nous supposerons d'abord que le point O tombe entre les droites

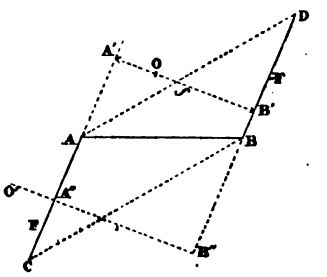

Fig. 95.

AC et BD, prolongées autant qu'il est nécessaire. Le moment du couple, c'est-à-dire la somme des moments des deux forces qui composent le couple, par rapport à l'axe O, a pour valeur (les deux moments sont de même signe, les deux forces tendant à faire tourner dans le même sens un observateur placé sur l'axe) :

$$F \times OA' + F \times OB' = F(OA' + OB') = Ff$$

Supposons maintenant que le pied de l'axe des moments tombe en O' en dehors des deux droites AC, BD; les deux moments sont de signes contraires et leur somme a pour valeur :

$$F \times O'B'' - F \times O'A'' = F(O'B'' - O'A'') = Ff.$$

Le moment du couple par rapport à un axe quelconque perpendiculaire à son plan, a donc pour expression le produit de la force par le bras de levier. Ce produit est égal à la surface du parallélogramme ABCD ayant les deux forces du couple pour côtés opposés. On voit que ce moment a toujours la même valeur quel que soit l'axe, pourvu que cet axe soit perpendiculaire au plan du couple. La proposition énoncée est donc établie dans ce cas.

Cherchons maintenant le moment du couple par rapport à un axe quelconque non perpendiculaire à son plan. Projetons les deux forces du couple sur un plan perpendiculaire à cet axe. Soient $A_1 C_1 = F_1$, $B_1 D_1 = -F_1$ les deux forces ainsi projetées (fig. 96). Ces deux projections constituent un nouveau couple, situé dans un plan perpendiculaire à l'axe des moments. Nous savons d'ailleurs que le moment par rapport à cet axe de chacune des forces F_1 est le même que celui de la force F dont la force F_1 considérée est la projection. Le moment du couple F est donc égal à celui du couple F_1, lequel a pour valeur $F_1 f_1$, quel que soit l'axe perpendiculaire au plan du couple F_1. On voit donc que le moment du couple $(F, -F)$ aura la même valeur par rapport à un axe quelconque parallèle à l'axe considéré, ce qui démontre la proposition énoncée dans le cas général.

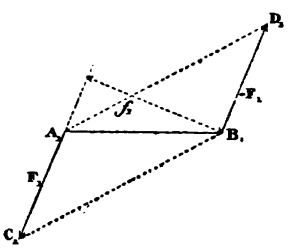

Fig. 96.

Il est facile de déterminer la valeur du moment du couple

$(F, -F)$ dans le cas général. Il est égal, avons-nous dit, à celui du couple $(F_1, -F_1)$; ce dernier a lui-même pour mesure la surface du parallélogramme $A_1C_1B_1D_1$ lequel est égal à la projection du parallélogramme ABCD sur un plan perpendiculaire à l'axe des moments. Si on désigne par α l'angle de ce dernier plan avec le plan du couple $(F, -F)$, on sait que l'on a :

$$\text{Surf. } A_1B_1C_1D_1 = \text{Proj. de surf. } ABCD = \text{Surf. } ABCD \times \cos\alpha = F f \cos\alpha$$

Le moment du couple $(F, -F)$ par rapport à un axe quelconque a donc pour expression $F f \cos\alpha$, en appelant F la force du couple, f son bras de levier et α l'angle du plan du couple avec un plan perpendiculaire à l'axe des moments. Le signe du moment sera le signe + ou le signe —, suivant que le couple tendra à faire tourner la droite, qui joint les points d'application des forces, dans le sens des moments positifs ou dans le sens des moments négatifs. Il résulte de là qu'un corps solide soumis à un couple ne sera jamais en équilibre, car le moment du couple par rapport à un axe quelconque ne peut jamais être nul, à moins que F soit nul, auquel cas le couple n'existe pas, ou que f soit nul, auquel cas les forces qui constituent le couple, se placent dans le prolongement l'une de l'autre et se détruisent.

68. — Composition des couples. — Deux couples situés dans des plans parallèles et ayant leurs moments égaux et de mêmes signes, sont équivalents. — Soient $(F, -F)$ et $(P, -P)$ deux couples satisfaisant à la condition énoncée. Je dis qu'ils sont équivalents. En effet : 1° la somme des projections sur un axe quelconque des forces qui composent chacun d'entre eux est égale, puisque cette somme est nulle pour chacun des deux couples; 2° les moments Ff, Pp des deux couples étant égaux et de même signe, il en sera de même de leurs moments $Ff \cos\alpha$ et $Pp \cos\alpha$ par rapport à un axe quelconque perpendiculaire à un plan faisant un angle α avec la direction commune des plans des deux couples.

69. — Axe d'un couple. — Nous avons vu au n° 49 qu'on appelle axe d'un moment une droite dirigée suivant la droite par rapport

à laquelle est pris le moment, et dont la longueur, comptée à partir d'une origine fixe dans un sens convenu, suivant que le moment considéré est positif ou négatif, est égale à la valeur absolue de ce moment. L'axe du moment d'un couple par rapport à une droite quelconque perpendiculaire à son plan est ce qu'on appelle l'*axe de ce couple*.

L'axe du moment d'un couple par rapport à une droite quelconque est égal à la projection sur cette droite de l'axe du couple. — En effet soit $(F, -F)$ un couple (figure 97), f son bras de levier, O D une droite quelconque par rapport à laquelle nous nous proposons de trouver le moment du couple.

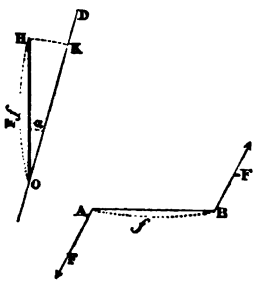

Fig. 97.

Prenons un point O sur cette droite comme origine de l'axe du couple. Cet axe s'obtiendra en portant sur une perpendiculaire O H au plan du couple une longueur $OH = F f$, dans le sens positif si le couple est dans le sens direct, en sens opposé dans le cas contraire. Projetons O H en O K sur O D ; soit α l'angle H O D. La droite O K est égale à O H $\cos \alpha$ ou à $F f \cos \alpha$, c'est-à-dire au moment du couple par rapport à O D (Voir n° 67). Elle est dirigée dans le même sens que O H, c'est-à-dire dans le sens positif ou négatif suivant le sens du couple. C'est donc l'axe du moment du couple par rapport à O D.

70. — **L'ensemble de plusieurs couples est équivalent à un couple unique dont l'axe est égal à la résultante géométrique des axes des couples composants.** — En effet : 1° La somme des projections des deux forces du couple ainsi défini sur une droite quelconque est égale à la somme des projections des forces des couples composants, ces deux sommes étant nulles.

2° Le moment du couple ainsi défini, par rapport à une droite quelconque, est égal à la somme des moments des couples composants par rapport à la même droite. En effet, le moment de l'un quelconque des couples par rapport à une droite quelconque est, ainsi que nous venons de le voir, égal à la projection de l'axe

du couple sur cette droite ; l'axe du couple résultant étant égal à la résultante géométrique des axes des couples composants, on sait que sa projection sur une droite quelconque, c'est-à-dire le moment du couple résultant par rapport à cette droite, est égale à la somme des projections sur la même droite des axes des couples composants, c'est-à-dire à la somme des moments des couples composants par rapport à la même droite.

Les deux conditions d'équivalence sont donc remplies. Par suite le couple déterminé comme il a été dit en commençant est équivalent à l'ensemble des couples donnés.

71. — Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles appliquées à un corps solide. — Pour composer un nombre quelconque de forces parallèles appliquées à un corps solide, on composera ensemble toutes les forces de même sens ; on obtiendra ainsi deux résultantes partielles parallèles et de sens contraires. On les composera et on obtiendra une résultante unique ou un couple.

72. — Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées à un corps solide et situées dans un même plan. — On composera deux des forces en transportant leurs points d'application à leur intersection, ce que l'on peut faire, ainsi qu'on l'a vu au n° 63. On obtiendra une première résultante que l'on composera de la même manière avec une troisième force. En continuant ainsi, on sera ramené finalement à composer deux forces dans un même plan. Elles donneront une résultante unique ou un couple.

73. — Composition d'un système de forces quelconques appliquées à un même corps solide. — Soit F l'une quelconque des forces appliquées au solide, A son point d'application (fig. 98). Soit O un point quelconque invariablement lié au solide. Menons par ce point deux forces, F_1, $-F_1$, égales et parallèles à F, l'une de même sens, l'autre de sens contraire. Le système des trois forces F, F_1, $-F_1$, est évidemment équivalent à la force donnée F, les deux forces appliquées en O ayant la somme de leurs projections sur un axe quelconque nulle, de même que la somme de

leurs moments par rapport à un axe quelconque; l'ensemble de ces trois forces se compose d'une force F_1 appliquée en O et d'un couple $(F, -F_1)$.

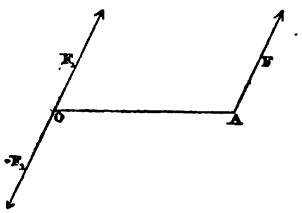

Fig. 98.

Nous pouvons procéder pour toutes les forces appliquées au solide comme nous avons fait pour la force F. Nous aurons ainsi ramené le système des forces données :

1° A un système de forces concourantes en O, toutes égales, parallèles et de même sens que les forces données ;

2° A un système de couples tels que le couple $(F, -F_1)$.

Les forces concourantes se composent en une force unique dite *résultante de translation.* C'est la résultante géométrique, le point O étant pris pour origine, des forces directement appliquées au solide.

Les couples se composent en un couple résultant unique.

On voit donc qu'un système de forces quelconques appliquées à un corps solide peut se décomposer en une force, qui est la résultante de translation, et un couple; cette décomposition peut se faire d'une infinité de manières, car le point O est complètement arbitraire.

Ce système peut encore être simplifié. Parmi tous les couples équivalents au couple résultant, nous pouvons en choisir un tel que l'une des forces qui le composent passe par le point O. Cette force pourra être composée en une résultante unique, avec la résultante de translation. Nous aurons ainsi deux forces équivalentes au système donné : cette dernière résultante, et la force du couple qui ne passe pas par le point O.

Cette composition en deux forces du système des forces appliquées au solide peut s'effectuer d'une infinité de manières différentes : 1° parce que le point O est arbitraire; 2° parce qu'il existe une infinité de couples équivalents au couple résultant, tels que l'une des forces du couple passe par le point O.

Dans le cas où la résultante de translation est parallèle au plan du couple résultant, les trois forces, étant dans un même plan, se composent suivant une résultante unique. Dans ce cas, le système des forces appliquées au solide admet une résultante uniq

§ III. — CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CORPS SOLIDE

74. — Centre de gravité d'un solide. — Parmi toutes les forces qui peuvent être appliquées à un corps solide situé à la surface terrestre, il en est une à laquelle il est constamment soumis, c'est l'attraction terrestre ou pesanteur. Nous allons rechercher comment se composent les forces qui résultent de l'action de la pesanteur sur toutes les molécules d'un corps solide.

Soit m la masse d'une molécule quelconque du solide. L'action de la pesanteur sur cette molécule détermine une force verticale dont l'intensité est égale à $m\,g$, g désignant l'accélération due à la pesanteur. Toutes les forces telles que $m\,g$, appliquées aux différentes molécules du solide, sont parallèles et de même sens. Nous savons qu'elles se composent en une résultante unique, parallèle et de même sens que les composantes, et égale à leur somme. Le point d'application de cette résultante s'appelle *le centre de gravité du solide.*

75. — Détermination analytique du centre de gravité d'un solide. — Soient ox, oy, oz trois axes rectangulaires auxquels nous rapporterons le solide; nous supposerons l'axe oz vertical. Nous nous proposons de déterminer les coordonnées du centre de gravité de ce solide.

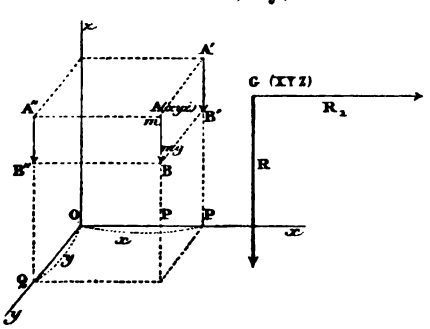

Fig. 99.

Soit A un point du solide (fig. 99), x, y, z ses coordonnées, m sa masse; la force $AB = m\,g$ appliquée en A, est la force résultant de l'action de la pesanteur sur ce point. Soit R la résultante des forces telles que $m\,g$; la force R est appliquée au centre de gravité cherché G. Soient X, Y, Z les coordonnées du point G.

La force R est égale à la somme des forces telles que $m\,g$,

appliquées à toutes les molécules du solide ; elle est de plus parallèle à o z et dirigée de haut en bas, comme les forces mg:

$$R = \Sigma\, mg$$

Écrivons que les moments de R par rapport aux trois axes sont respectivement égaux à la somme des moments des forces telles que $m\,g$, pris par rapport aux mêmes axes.

Le moment de la force mg par rapport à l'axe ox est égal à la projection A″ B″ de A B sur le plan zoy perpendiculaire à ox, multipliée par la plus courte distance O Q $= y$ de ox et de A″B″ ; A″B″ est égal à A B, c'est-à-dire à mg. Le moment de mg par rapport à ox est donc égal à mgy, c'est-à-dire au produit de la force par la coordonnée y, de son point d'application. Il en est de même pour toutes les forces telles que mg et pour la force R, toutes parallèles et de même sens ; on a donc :

$$\Sigma\, mgy = R\,Y = \Sigma\, mg \times Y$$

Ou en divisant par g, facteur commun dans les deux membres :

$$\Sigma\, my = Y \times \Sigma\, m$$

$$Y = \frac{\Sigma\, my}{\Sigma\, m} \qquad (1)$$

En prenant les moments des forces par rapport à o y, on trouverait de même :

$$X = \frac{\Sigma\, mx}{\Sigma\, m} \qquad (2)$$

Si nous prenons les moments par rapport à oz, nous remarquerons que, oz étant parallèle à toutes les forces mg et à R, les moments de toutes ces forces par rapport à oz sont nuls, et que, en écrivant que le moment de R est égal à la somme des moments des composantes, nous aurons une équation de la forme $0 = 0$ qui ne pourra pas nous servir à déterminer la troisième coordonnée Z du centre de gravité G.

Mais, si aux forces verticales mg nous substituons des forces horizontales parallèles à ox, toutes de même sens, respectivement égales aux forces mg, et ayant mêmes points d'application, les résultantes successives, que nous obtiendrons en composant deux

à deux ces nouvelles forces, seront appliquées aux mêmes points que si ces forces étaient verticales. Car, dans la composition des forces parallèles, le point d'application de la résultante ne dépend que du rapport de la grandeur des forces et de leur sens, mais nullement de leur direction. Donc, la résultante définitive R des forces horizontales ainsi définies aura son point d'application en G et sera égale en grandeur absolue à la somme des forces mg :

$$R_1 = \Sigma\, mg$$

Si nous écrivons que le moment de R_1, par rapport à oz, est égal à la somme des moments des forces horizontales définies ci-dessus, nous trouverons par un raisonnement tout semblable à celui que nous avons fait plus haut :

$$Z = \frac{\Sigma\, mz}{\Sigma\, m} \qquad (3)$$

Les équations (1) (2) et (3) nous donnent les coordonnées du centre de gravité.

76. — Centre de gravité d'un volume, d'une surface, d'une ligne. — Quand un solide est *homogène*, c'est-à-dire quand la matière qui le constitue est telle que les masses de ses différentes parties sont proportionnelles à leurs volumes, le centre de gravité du solide est indépendant de la masse de l'unité de volume de cette matière. On l'appelle dans ce cas : *centre de gravité du volume*.

On appelle *centre de gravité d'une surface* le centre de gravité d'un prisme dont cette surface serait la base et dont la hauteur serait infiniment petite.

On appelle *centre de gravité d'une ligne* le centre de gravité du volume engendré par une surface infiniment petite se déplaçant normalement à cette ligne.

77. — Généralités sur la position des centres de gravité. — Le centre de gravité d'une ligne ou d'une surface plane se trouve dans le plan de cette ligne ou de cette surface. — En effet, les forces déterminées par l'action de la pesanteur sur les différents

éléments de cette ligne ou de cette surface ont toutes leurs points d'application dans son plan. Quand on composera successivement entre elles ces forces élémentaires, les points d'application de toutes les résultantes successives et par suite de la résultante définitive de toutes ces forces, se trouveront nécessairement dans le même plan.

78. — Quand tous les points d'une ligne, d'une surface ou d'un volume sont deux à deux symétriques par rapport à un plan, à une droite ou à un point, le centre de gravité de cette ligne, de cette surface ou de ce volume est situé sur ce plan, sur cette droite ou en ce point. — En effet, tous les points de la ligne, de la surface ou du volume étant symétriques deux à deux par rapport au plan, à la droite ou au point donné, la ligne, la surface ou le volume pourront être décomposés en éléments égaux et symétriques deux à deux par rapport à ce plan, à cette droite ou à ce point. Les forces résultant de l'action de la pesanteur sur ces éléments égaux, sont elles-mêmes deux à deux égales et symétriquement appliquées par rapport au plan, à la droite ou au point donné. Par suite, les résultantes partielles obtenues en composant ces forces parallèles égales et symétriquement appliquées, auront toutes leurs points d'application situés dans le plan, sur la droite ou au centre de symétrie, et il en sera de même de la résultante définitive que l'on obtiendra en composant entre elles toutes ces résultantes partielles.

79. — Centres de gravité de quelques figures géométriques. — *Le centre de gravité d'une ligne droite est en son milieu.* — En effet, tous les points d'une ligne droite sont deux à deux symétriques par rapport à son milieu.

Le centre de gravité d'une circonférence ou d'un cercle est le centre. — Cela résulte encore de la proposition établie dans le numéro précédent.

Le centre de gravité d'un parallélogramme est le point d'intersection de ses diagonales. — En effet, les points du parallélogramme sont deux à deux symétriques par rapport au point d'intersection des diagonales.

Le centre de gravité de la surface d'un triangle est à l'intersection des médianes. — Soit ABC un triangle (fig. 100), CD la médiane correspondant au sommet C. Divisons la surface du triangle en trapèzes élémentaires au moyen de parallèles au côté AB, infiniment voisines les unes des autres. Soit EFHK l'un de ces trapèzes ; menons FH′ parallèle à AC. Le trapèze EFHK est la somme du parallélogramme EFH′K et du triangle FHH′ dont la surface est infiniment petite par rapport à celle du parallélogramme. Le centre de gravité du trapèze se confond donc avec celui du parallélogramme EFH′K ; par suite, il se trouve au centre de ce parallélogramme. Quand les deux parallèles EF, HK tendent l'une vers l'autre, le centre du parallélogramme EFH′K se confond à la limite avec le milieu L de EF. Le point L est sur la médiane CD.

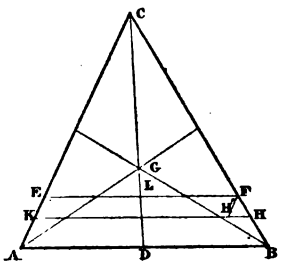

Fig. 100.

On voit donc que toutes les résultantes partielles correspondant à la décomposition de la surface du triangle ABC en trapèzes élémentaires par des parallèles à AB, ont leur point d'application sur la médiane CD. La résultante totale obtenue en composant entre elles ces résultantes partielles aura également son point d'application sur CD.

Le centre de gravité du triangle se trouve donc sur l'une quelconque des trois médianes. Il se trouve, par suite, à leur intersection G, c'est-à-dire au tiers inférieur de chaque médiane.

Centre de gravité d'un trapèze. — On verra par un raisonnement tout semblable à celui du numéro précédent que le centre de gravité d'un trapèze se trouve sur la droite EF qui joint les milieux des bases (fig. 101).

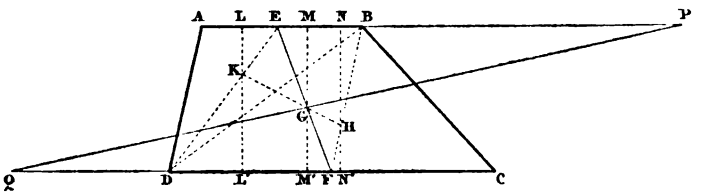

Fig. 101.

Si d'ailleurs nous décomposons le trapèze en deux triangles par la diagonale BD, nous savons que le centre de gravité du triangle ABD se trouve au point K situé au tiers à partir du point E de la médiane DE. Le centre de gravité du triangle BCD se trouve de même sur la médiane BF au point H, tel que $FH = \frac{1}{3} BF$. Le centre de gravité du trapèze ABCD, formé par la réunion des deux triangles, se trouve sur la droite HK qui joint les centres de gravité de ces triangles; il se trouve donc à l'intersection G de cette droite et de la droite EF.

On peut déterminer, par une construction simple, la position du point G sans être obligé de déterminer préalablement les points H et K. Appliquons en effet le théorème des moments aux poids des triangles ABD, BDC et du trapèze ABCD en supposant la direction de la pesanteur perpendiculaire au plan de la figure et en remarquant que les poids des deux triangles et du trapèze sont proportionnels à leurs surfaces, c'est-à-dire à AB, CD, AB + CD. Prenons AB pour axe des moments, abaissons KL, GM, HN perpendiculaires sur AB; nous aurons :

$$(AB + CD) \times GM = AB \times KL + CD \times HN$$

or on a, en désigant par h la hauteur du trapèze :

$$KL = \frac{h}{3} \quad HN = \frac{2h}{3}$$

on a donc :

$$(AB + CD) \times GM = AB \times \frac{h}{3} + CD \times \frac{2h}{3}$$

On aura de même, en prenant CD pour axe des moments :

$$(AB + CD) \times GM' = AB \times \frac{2h}{3} + CD \times \frac{h}{3}$$

divisons membre à membre ces deux égalités, il vient :

$$\frac{GM}{GM'} = \frac{AB + 2CD}{2AB + CD} = \frac{\frac{AB}{2} + CD}{AB + \frac{CD}{2}}$$

Menons BP = CD, DQ = AB; nous avons :

$$\frac{AB}{2} + CD = EB + BP = EP$$

$$AB + \frac{CD}{2} = DQ + DF = FQ$$

on a donc :

$$\frac{GM}{GM'} = \frac{EP}{FQ}$$

on a d'ailleurs :

$$\frac{GM}{GM'} = \frac{GE}{GF}$$

donc :

$$\frac{GE}{GF} = \frac{EP}{FQ}$$

Si nous joignons GP, GQ, nous voyons que les deux triangles GEP, GFQ ont leurs angles en E et en F, égaux comme alternes internes, compris entre deux côtés proportionnels. Ils sont semblables, et par suite les points P, Q, G sont en ligne droite. Le pont G se trouve donc à l'intersection de la droite EF et de la droite PQ déterminée comme il a été dit ci-dessus.

Centre de gravité d'un prisme ou d'un cylindre. — Soit ABCD EFHK un prisme (fig. 102). Décomposons-le en prismes élémentaires au moyen d'une série de plans parallèles aux bases, infiniment voisins les uns des autres. Ces plans détermineront dans le prisme des sections égales LMPQ, L'M'P'Q' dont les centres de gravité G, G' seront tous sur une même droite RT parallèle aux arêtes.

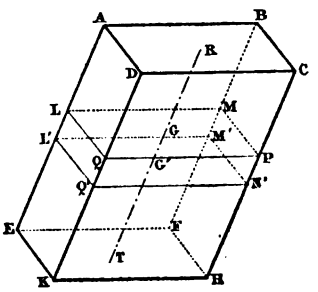

Fig. 102.

Le centre de gravité du prisme élémentaire LMPQ, L'M'P'Q se confondra avec le point G quand l'arête LL' tendra vers zéro. Les forces déterminées par l'action de la pesanteur sur les prismes élémentaires ayant toutes leur point d'application sur l'arête RT, leur résultante aura son point d'application sur RT. Comme d'ailleurs pour des hauteurs égales, correspondant à des divisions élémentaires égales de RT, ces prismes élémentaires ont des volumes égaux, il en résulte que les résultantes partielles appli-

quées aux différents points de R T sont égales; le centre de gravité est donc au milieu de R T.

On verrait par un raisonnement identique que le centre de gravité d'un cylindre est au milieu de la génératrice passant par le centre de gravité des sections parallèles aux bases du cylindre.

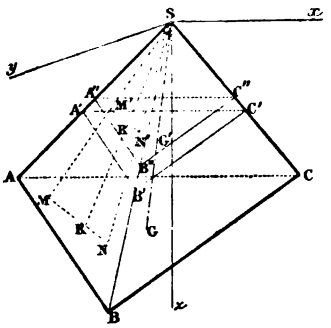

Fig. 103.

Centre de gravité d'une pyramide. — Soit S A B C une pyramide, S son sommet, A B C sa base, G le centre de gravité de cette base. Soit A′B′C′ une section parallèle à A B C, G′ le centre de gravité de cette section. Nous allons démontrer en premier lieu que le point G′ se trouve sur la droite S G (fig. 103).

Les polygones A B C, A′B′C′ sont semblables. Leurs dimensions homologues sont dans un rapport constant k égal à $\frac{SA}{SA'}$. Leurs surfaces sont entre elles dans le rapport k^2 du carré de leurs dimensions homologues. Divisons la surface de la base A B C en une infinité d'éléments infiniment petits $d\alpha$, $d_1\alpha$... $d_n\alpha$... Les cônes ayant S pour sommet et $d\alpha$, $d_1\alpha$,... $d_n\alpha$ pour bases, divisent la section A′B′C′ en éléments infiniment petits $d\alpha'$, $d_1\alpha'$,... $d_n\alpha'$... respectivement semblables à $d\alpha$, $d_1\alpha$,... $d_n\alpha$,... et tels que les rapports $\frac{d\alpha}{d\alpha'}$, $\frac{d_1\alpha}{d_1\alpha'}$,.. $\frac{d_n\alpha}{d_n\alpha'}$,... des éléments de surfaces correspondants sont tous égaux à k^2.

Ceci posé, soient M et N les centres de gravité de deux des éléments $d_p\alpha$, $d_q\alpha$ de la surface A B C. M′ et N′ sont les centres de gravité des éléments correspondants $d_p\alpha'$, $d_q\alpha'$ de la surface A′B′C′. Les forces résultant de l'action de la pesanteur sur les éléments correspondants de prismes infiniment minces ayant A B C, A′B′C′ pour bases, auront pour expression $gd_p\alpha$, $gd_q\alpha$, $gd_p\alpha'$, $gd_q\alpha'$. Si nous composons les deux forces $gd_p\alpha$, $gd_q\alpha$ appliquées en M et en N, leur résultante aura son point d'application en un point R de la droite M N, tel que le rapport $\frac{MR}{NR}$ ait pour valeur $\frac{gd_q\alpha}{gd_p\alpha}$, c'est-à-dire $\frac{d_q\alpha}{d_p\alpha}$. De même, la résultante des forces $gd_p\alpha'$, $gd_q\alpha'$, appliquées en M′ et N′, aura son point d'application en un point R′ de M′ N′, tel que

$\frac{M'R'}{N'R'} = \frac{d_q\alpha'}{d_p\alpha'}$. Mais les rapports, $\frac{d_q\alpha}{d_q\alpha'}$, $\frac{d_p\alpha}{d_p\alpha'}$ sont égaux comme étant tous deux égaux à k^2. On en déduit l'égalité des rapports $\frac{d_q\alpha}{d_p\alpha}$, $\frac{d_q\alpha'}{d_p\alpha'}$, et par suite, des rapports $\frac{MR}{NR}$, $\frac{M'R'}{N'R'}$. Les triangles SMR, SM'R' sont donc semblables, et les points S, R et R' sont en ligne droite.

Donc quand on composera successivement les forces résultant de l'action de la pesanteur sur les éléments des surfaces ABC, A'B'C', les points d'application des résultantes des forces exercées sur les éléments correspondants des deux surfaces seront sur une même ligne droite avec le sommet S. Les points d'application des résultantes définitives, c'est-à-dire les points G et G', sont aussi sur une même ligne droite avec le sommet S.

Pour déterminer la position du centre de gravité sur la droite SG, rapportons la pyramide à trois axes rectangulaires Sx, Sy, Sz, l'axe Sz étant supposé perpendiculaire au plan ABC. Désignons par A la surface de la base ABC, par H la hauteur de la pyramide, par Z le z du centre de gravité. Nous avons vu (n° 75) que l'on a :

$$Z = \frac{\Sigma\, mz}{\Sigma\, m}$$

Soit v le volume A'B'C' A''B''C'' compris entre la section A'B'C' correspondant à l'ordonnée z, et une section infiniment voisine A''B''C''. On a en désignant par A' la surface A'B'C' :

$$v = A'\, dz$$

D'ailleurs on a en désignant par V le volume de la pyramide :

$$V = \frac{1}{3} AH$$

Les volumes v et V sont proportionnels aux masses m et $\Sigma\, m$ de ces volumes. L'expression de Z peut donc s'écrire.

$$Z = \frac{\Sigma\, v\, z}{V} = \frac{\Sigma\, A'\, z\, dz}{\frac{1}{3} AH}$$

Mais nous avons vu plus haut que l'on a :

$$\frac{A'}{A} = \frac{1}{k^2} = \frac{z^2}{H^2}$$

Remplaçons dans l'expression de Z, $\frac{A'}{A}$ par sa valeur $\frac{z^2}{H^2}$, il vient

$$Z = \frac{\Sigma\, z^3\, dz}{\frac{H^3}{3}} = \frac{3}{H^3}\int_0^H z^3\, dz = \frac{3}{H^3} \times \frac{1}{4} H^4 = \frac{3}{4} H$$

On voit en résumé que le centre de gravité d'une pyramide se trouve aux trois quarts de la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base.

80. — Détermination analytique du centre de gravité d'une ligne, d'une surface ou d'un volume quelconque. — Nous avons donné plus haut les formules générales qui donnent les coordonnées du centre de gravité d'un corps solide :

$$X = \frac{\Sigma\, mx}{\Sigma\, m} \quad Y = \frac{\Sigma\, my}{\Sigma\, m} \quad Z = \frac{\Sigma\, mz}{\Sigma\, m}$$

Pour appliquer ces formules à la détermination du centre de gravité d'une ligne, il suffira de remarquer qu'un volume engendré par une surface infiniment petite se déplaçant suivant cette ligne, pourra être considéré comme formé par la réunion d'un système de cylindres infiniment petits, ayant tous même base, et ayant pour hauteur un élément ds de la ligne dont il s'agit. Les volumes de ces cylindres élémentaires, qui ont tous même section, sont proportionnels à leur hauteur, c'est-à-dire à ds. On peut donc dans les formules générales remplacer m par ds, et on a :

$$X = \frac{\Sigma\, x\, ds}{\Sigma\, ds} \quad Y = \frac{\Sigma\, y\, ds}{\Sigma\, ds} \quad Z = \frac{\Sigma\, z\, ds}{\Sigma\, ds}$$

$\Sigma\, ds$, c'est la longueur totale L de la ligne. Il ne reste qu'à remplacer ds par son expression en fonction des coordonnées de chaque point de la courbe, et à intégrer entre des limites correspondant aux deux extrémités de la courbe.

On opérera d'une manière semblable pour trouver le centre de gravité d'une surface ou d'un volume.

CHAPITRE VIII

ÉQUILIBRE DE QUELQUES SYSTÈMES DE POINTS MATÉRIELS

§ I. — Équilibre d'un système de points matériels soumis à la pesanteur. — Équilibre indifférent. — Application : Pont-levis à flèche.

§ II. — Polygones funiculaires. — Équilibre d'un cordon simple soumis à deux forces. — De trois cordons réunis par un nœud. — Cas général. — Polygone de Varignon. — Cas où les points extrêmes sont supportés par des appuis fixes. — Application aux ponts suspendus.

§ III. — Polygones articulés. — Définition. — Articulations sphériques; cylindriques. — Conditions d'équilibre d'un polygone à articulations sphériques. — Application : Équilibre d'une ferme.

§I. — ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS SOUMIS A LA PESANTEUR

81. — Équilibre indifférent. — Nous avons vu que pour qu'un système de points matériels assujetti aux liaisons que nous avons définies au n° 56 soit en équilibre, la condition nécessaire et suffisante est que la somme des travaux virtuels des différents points du système soit nulle pour tout déplacement compatible avec ces liaisons.

Appliquons ce théorème au cas d'un système matériel soumis seulement à l'action de la pesanteur; nous allons rechercher d'abord l'expression de la somme des travaux des forces résultant de l'action de la pesanteur sur les différents points du système, pour un déplacement quelconque compatible avec les liaisons.

Rapportons le système à trois axes de coordonnées rectangulaires dont l'un o z est vertical. Soit p le poids d'un point quelconque du système; supposons que dans le déplacement du sys-

tème, le z de ce point varie de dz ; le travail élémentaire de la force p aura pour expression :

$$p\,dz$$

La somme des travaux des forces dues à l'action de la pesanteur sur l'ensemble des points du système aura pour valeur :

$$\Sigma\, p\,dz$$

Mais si on désigne par Z le z du centre de gravité du système et par P son poids total, on a (voir n° 75) :

$$Z = \frac{\Sigma\, pz}{P}$$

Et par suite :

$$\Sigma\, pz = PZ \qquad (1)$$

Quand, par suite du déplacement du système, le z de chaque point de poids p sera devenu $z + dz$, Z prendra la valeur $Z + dZ$ et l'on aura toujours :

$$\Sigma\, p\,(z + dz) = P\,(Z + dZ)$$

ou :

$$\Sigma\, pz + \Sigma\, p\,dz = PZ + P\,dZ \qquad (2)$$

et, en retranchant l'égalité (1) de l'égalité (2) on a :

$$\Sigma\, p\,dz = P\,dZ$$

On voit donc que la somme des travaux des forces dues à l'action de la pesanteur sur les différents points du système est égale au produit du poids P du système, par le déplacement vertical dZ de son centre de gravité.

Pour que l'équilibre ait lieu, il faut que cette somme soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons. Il faut donc que $P\,dZ$ soit nul, et comme P ne peut l'être, il faut que dZ le soit.

En d'autres termes, pour qu'un système de points matériels soumis à l'action de la pesanteur soit en équilibre, il faut et il suffit que, pour tout déplacement compatible avec les liaisons, son centre de gravité soit fixe ou assujetti à se mouvoir dans un plan horizontal.

Quand cette condition est satisfaite, on dit que le système est en *équilibre indifférent.*

82. — Application. — Pont-levis à flèche. — Le pont-levis à flèche est formé par un tablier A B mobile autour d'un axe horizontal A (fig. 104). Ce tablier est relié au moyen d'une chaîne B C à une flèche C D E mobile autour d'un axe D, et à l'extrémité de laquelle est disposé un contrepoids convenable. La longueur D C est égale à A B et la distance A D des deux axes du tablier et de la flèche est égale à la longueur B C. Les centres de gravité G et H du tablier et de la flèche sont tels que les droites A G, D H sont parallèles et de sens contraires et que leurs longueurs sont proportionnelles aux poids P et Q du tablier et de la flèche, de telle sorte que l'on ait : $\frac{AG}{DH} = \frac{Q}{P}$. Le système est en équilibre indifférent.

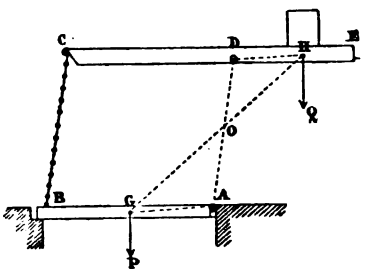

Fig. 104.

En effet, dans toutes les positions du système, la figure A B C D restera un parallélogramme ; par suite, les droites A G, D H, qui sont invariablement liées aux droites A B, C D, lesquelles sont toujours parallèles, resteront elles-mêmes parallèles. Les poids Q et P ne changent d'ailleurs pas. Si nous menons la droite G H, elle coupera la droite A D en un point O tel que l'on aura :

$$\frac{AO}{OD} = \frac{OG}{OH} = \frac{AG}{DH} = \frac{Q}{P}$$

Le point O qui divise la droite fixe A D dans un rapport constant $\frac{Q}{P}$ est un point fixe. D'autre part, ce point, dans toutes les positions du système, divise la droite G H dans un rapport égal au rapport des forces parallèles P et Q appliquées aux deux extrémités de cette droite. C'est donc le point d'application de la résultante des forces P et Q ou, en d'autres termes, le centre de gravité du système. Donc le centre de gravité du système est un point fixe pour tout déplacement du système. Il y a équilibre indifférent.

Il résulte de là que, le système étant en équilibre dans toutes les positions qu'il peut prendre, le travail des forces de la pesanteur sera nul pour tout déplacement du système, et que, par suite, il n'y aura pour le mettre en mouvement d'autres résistances à vaincre que celles dues aux frottements.

§ II. — ÉQUILIBRE DES POLYGONES FUNICULAIRES

83. — Définition. — On appelle *polygone funiculaire* un polygone dont les côtés sont constitués par des cordons, et aux sommets duquel sont appliquées des forces. Nous allons rechercher les conditions d'équilibre d'un pareil système de points matériels.

84. — Équilibre d'un cordon simple soumis à l'action de deux forces. — Soit un cordon A B soumis à l'action de deux forces F et F' (fig. 105). La condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre ait lieu est que les forces F et F' soient égales, directement opposées, appliquées suivant la direction du cordon, et dans le sens nécessaire pour le tendre.

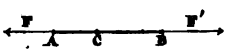

Fig. 105.

La condition est nécessaire. En effet, supposons que l'équilibre ait lieu. Nous pouvons supposer, sans en altérer les conditions, que le système soit solidifié. On rentre alors dans le cas d'un corps solide soumis à l'action de deux forces. Pour que l'équilibre ait lieu, il faut que les deux forces soient égales, contraires et directement opposées.

Je dis de plus qu'il faut que les deux forces soient dans le sens nécessaire pour tendre le fil ; sinon, si nous supposons que le système cesse d'être solide, nous voyons que le fil n'ayant aucune résistance qui empêche les forces de rapprocher leurs points d'application, l'équilibre cesserait d'avoir lieu.

Donc, la condition énoncée est nécessaire.

La condition est suffisante. En effet, si elle est remplie, il est bien évident que le cordon est en équilibre. Il n'y a aucune raison pour qu'il se déplace dans un sens plutôt que dans l'autre.

Supposons que la condition soit remplie et que l'équilibre ait lieu ; une extrémité A du cordon est en équilibre sous l'action de

la force F et de la tension du fil. Donc la tension exercée par le cordon sur le point A est égale à la force F' appliquée en B et transportée parallèlement à elle-même au point A.

Considérons maintenant un point intermédiaire C du cordon. La partie AC du cordon est en équilibre, et par suite la force appliquée en C est égale et parallèle à F'; la partie BC du cordon transmet donc en ce point une force égale et parallèle à F'. On verrait de même que la partie A C transmet au même point une force égale et parallèle à F.

Donc, chaque point du cordon est sollicité par deux forces égales et parallèles à F et F'. La résistance du cordon à la tension empêche ses molécules de se disjoindre sous l'action de ces deux forces.

85. — Équilibre d'un système de trois cordons réunis par un nœud et soumis à l'action de trois forces F, F', F''. — La condition d'équilibre est que chacune des forces soit appliquée dans la direction du cordon, dans le sens nécessaire pour le tendre, et que la résultante des forces, transportées parallèlement à elles-mêmes au point de jonction A des trois cordons, soit nulle (fig. 106).

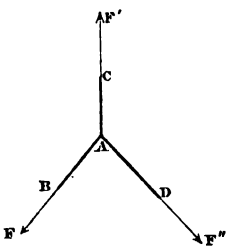

Fig. 106.

La condition est nécessaire. En effet, supposons le système en équilibre. Chacun des cordons pris séparément est en équilibre; donc, la force qui lui est appliquée est dirigée suivant sa direction et dans le sens nécessaire pour le tendre. De plus, chaque cordon transmet au point A une force égale et parallèle à celle qui lui est appliquée. Le point A doit par suite être en équilibre sous l'action de trois forces égales et parallèles à F, F', F''. Donc, la résultante de ces trois forces, transportées parallèlement à elles-mêmes en A, est nulle.

La condition est suffisante. Si elle est remplie, je dis que l'équilibre a lieu. En effet, s'il en est ainsi, nous ne troublerons pas l'équilibre en appliquant en A trois forces égales et directement opposées à F, F', F'', puisque ces trois nouvelles forces auront évidemment comme les trois premières leur résultante nulle. Mais alors chaque cordon est soumis à deux forces égales, contraires,

de même direction que lui et de sens voulus pour le tendre. Donc, chaque cordon est en équilibre et il en est de même du point A soumis à six forces qui se font équilibre, deux à deux.

Si les cordons, au lieu d'être au nombre de trois, étaient en nombre quelconque, on verrait, par un raisonnement identique, que les conditions d'équilibre sont que chaque force soit appliquée dans la direction de chaque cordon, dans le sens nécessaire pour le tendre, et que la résultante de toutes les forces transportées en A soit nulle.

86. — Equilibre d'un polygone funiculaire quelconque. — Soit $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, un polygone funiculaire (fig. 107). A ses différents sommets sont appliquées les forces P_1, F_1, F_2, F_3, F_4, P_2. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équilibre ait lieu sont : 1° que la résultante de translation des forces P_1, F_1, F_2, F_3 F_4, P_2 soit nulle; 2° que la résultante de translation des forces situées du même côté d'un cordon soit dirigée suivant ce cordon et dans le sens voulu pour le tendre.

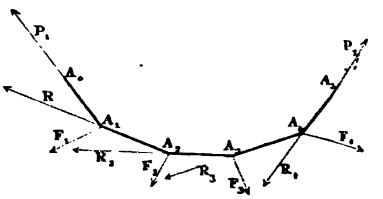

Fig. 107.

1° *La condition est nécessaire.* Si l'équilibre a lieu, elle est satisfaite. En effet, supposons le polygone funiculaire en équilibre. Le côté $A_0 A_1$ étant en équilibre, la force P_1 est dirigée suivant ce côté, dans le sens nécessaire pour le tendre et elle exerce sur le sommet A_1 une tension égale à P_1. Composons P_1 et F_1 en A_1; soit R_1 la résultante ; le côté $A_1 A_2$ étant en équilibre, la résultante R_1 doit être dirigée suivant ce côté dans le sens nécessaire pour le tendre, et le sommet A_2 reçoit du cordon $A_1 A_2$ une tension égale à R_1. Composons cette tension R_1 et la force F_2 en A_2. Soit R_2 la résultante; R_2 est la résultante de translation de P_1, F_1 et F_2; pour la même la raison que précédemment, R_2 doit être dirigée dans la direction du cordon $A_2 A_3$ et dans le sens voulu pour le tendre. En continuant ainsi de proche en proche, on arrivera à l'avant-dernier sommet A_4 auquel sera appliquée une force R_4 qui sera la résultante de translation de toutes les forces situées à gauche

de A_4; R_4 devra être dirigée dans la direction du dernier cordon $A_4 A_5$ dans le sens voulu pour le tendre, et devra, ce cordon étant en équilibre, être égale et directement opposée à la force P_5. On voit donc que la résultante de translation de toutes les forces est nulle et que la résultante de translation de toutes les forces situées d'un même côté de l'un des cordons est dirigée suivant ce cordon dans le sens nécessaire pour le tendre. Donc, la condition énoncée est nécessaire.

2° *La condition est suffisante.* Supposons-la remplie et fixons un instant tous les sommets du polygone. Le sommet A_0 est soumis à la force P_1 qui est dirigée suivant $A_0 A_1$ dans le sens nécessaire pour le tendre, puisque la condition énoncée est satisfaite. Si donc nous rendons libre le sommet A_0, le cordon $A_0 A_1$ reste en équilibre. Il transmet en A_1 la force P_1 qui, composée avec F_1, donne une résultante R_1 dirigée suivant $A_1 A_2$ dans le sens voulu pour tendre ce cordon, puisque la condition énoncée est remplie ; si donc nous rendons libre le sommet A_1, le cordon $A_1 A_2$ reste en équilibre. En raisonnant ainsi de proche en proche, nous verrons que nous pourrons rendre successivement libres tous les sommets du polygone, chacun des côtés restant en équilibre. Donc, dès que la condition énoncée est satisfaite, le polygone est en équilibre.

87. — Recherche de la figure d'équilibre d'un polygone funiculaire, étant données les forces appliquées à ses sommets. — Polygone de Varignon. — Il résulte de ce qui précède que, connaissant les forces appliquées à un polygone funiculaire, on peut déterminer la figure de ce polygone à l'état d'équilibre. Il suffira de donner au premier côté $A_0 A_1$ la direction de P_1, au côté $A_1 A_2$ la direction de R_1 résultante de P_1 et de F_1, au côté $A_2 A_3$ la direction de R_2 résultante de R_1 et de F_2, c'est-à-dire de P_1, de F_1 et de F_2, et ainsi de suite, chaque côté étant dirigé respectivement dans la direction des résultantes obtenues en composant successivement les forces P_1, F_1, F_2,... et dans le sens convenable pour que ce côté soit tendu.

Une construction très simple, due à Varignon, permet de déterminer facilement la direction de ces résultantes successives. Par

un point o (fig. 108), menons oa_1, égale, parallèle et de même sens que P_1 ; de a_1, menons $a_1 a_2$, égale, parallèle et de même sens que F_1, de même $a_2 a_3 = F_2$, $a_3 a_4 = F_3$, $a_4 a_5 = F_4$; en joignant a_5 o, nous avons une droite égale, parallèle et de sens contraire à la résultante géométrique des forces P_1, F_1, F_2, F_3, F_4 ; cette droite est égale à la force P_2 en grandeur, direction et sens, puisque par hypothèse la résultante de translation des forces P_1, F_1,... F_4, P_2, est nulle.

Si nous menons la droite oa_2, elle représentera en grandeur, direction et sens la résultante R_1 de P_1 et de F_1, de même oa_3 représentera R_2 ; oa_4, R_3 et oa_5, égale et contraire à a_5 o, c'est-à-dire à P_2, représentera R_4. On voit donc que les droites oa_1, oa_2, oa_3, oa_4, oa_5, sont parallèles et de sens contraires aux côtés du polygone funiculaire. Pour construire celui-ci, on mènera $A_0 A_1$ parallèle et de sens contraire à oa_1, on portera de A_0 en A_1 la longueur du premier cordon, du point A_1 on passera semblablement au point A_2, et ainsi de suite.

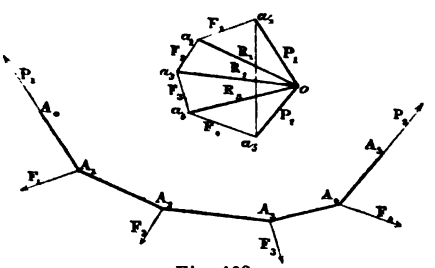

Fig. 108.

Il résulte de cette construction que, si toutes les forces données sont parallèles à un même plan, le polygone de Varignon sera tout entier dans un plan parallèle au premier, et par suite le polygone funiculaire lui-même sera dans un même plan parallèle au premier.

88. — Cas où les points extrêmes du polygone sont fixes. — Il peut se faire que les points A_0 et A_5 soient fixes au lieu d'être soumis à des forces P_1 et P_2. Dans ce cas, les cordons extrêmes du polygone transmettent aux appuis des efforts qui sont équilibrés par la réaction exercée par ceux-ci. Si on remplace cette réaction par les forces P_1, P_2, on rentre dans le cas général, et l'équilibre a lieu.

Il est facile de déterminer les réactions P_1, P_2 des appuis. Les forces P_1, P_2, F_1 F_2... ayant leur résultante nulle, la résultante d'un certain nombre d'entre elles est égale et contraire à la résultante

de toutes les autres. La résultante des forces F_1, F_2... F_4 est donc égale et contraire à la résultante des forces P_1, P_2.

Si donc nous menons à partir du point a_1 les droites $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 a_4$, $a_4 a_5$, égales en grandeur, direction et sens aux forces F_1, F_2, F_3, F_4, la droite $a_1 a_5$ représentera la résultante de ces forces, et par suite $a_5 a_1$, égale et directement opposée à $a_1 a_5$, sera la résultante de P_1 et de P_2. Pour obtenir les intensités de ces deux forces, il suffira de mener par les points a_1 et a_5 les droites a_5 o, a_1o respectivement parallèles aux directions de ces forces : ces deux droites seront égales aux forces P_1 et P_2, puisque leur résultante est bien $a_5 a_1$.

Le point o étant obtenu par l'intersection des droites a_1 o, a_5 o, on peut compléter la construction du polygone de Varignon en menant les droites oa_2, oa_3, oa_4... qui déterminent les directions des différents côtés du polygone et les tensions qu'ils supportent.

On voit que pour déterminer dans ce cas les éléments de la figure du polygone funiculaire, il faut se donner la direction des côtés extrêmes, ou plus généralement de deux quelconques de ses côtés ; si nous nous étions donné par exemple la direction des côtés $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, nous aurions commencé toujours par construire le polygone des forces $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$... puis, par les sommets a_2, a_4, nous aurions mené a_2 o, a_4 o respectivement parallèles à $A_1 A_2$, $A_3 A_4$.

Ayant ainsi déterminé la position du point o, nous aurions achevé sans peine la construction du polygone de Varignon en menant oa_1, oa_3, oa_5.

89. — Application aux ponts suspendus. — Un pont suspendu est formé d'un tablier en bois, suspendu au moyen de tiges équidistantes à deux câbles fixés en leurs extrémités à des points invariables.

La charge du pont, supposée uniformément répartie sur le tablier, se répartit par moitié sur chaque câble ; les tiges supportent des charges égales en raison de leur équidistance ; on voit donc que chacun des câbles n'est autre chose qu'un polygone funiculaire dont les extrémités sont des points fixes, et dont les sommets, situés sur des verticales équidistantes, supportent des forces verticales égales.

Pour déterminer la forme du polygone et les tensions supportées par ses différents côtés, nous allons construire le polygone de Varignon.

Il faut, avons-nous dit au n° 88, nous donner dans ce cas la direction de deux côtés. Nous supposerons que les points extrêmes sont sur une même horizontale et que les côtés sont en nombre impair ; nous nous donnerons la direction du côté extrême et celle du côté du milieu que nous supposerons horizontal.

Le polygone sera évidemment symétrique par rapport à la verticale oy menée par le milieu o, du côté horizontal. Nous nous occuperons seulement de la partie A_0 A_1 A_2... A_6 (fig. 109) comprise entre l'extrémité A_0 et l'extrémité A_6 du côté horizontal; construisons le polygone de Varignon comme il a été dit au numéro précédent; à cet effet, menons a_1 a_2 égale, parallèle et de même sens que la force F appliquée en A_1, a_2 a_3 égale, parallèle et de même sens que la force F appliquée en A_2... et ainsi de suite, a_3 a_4, a_4 a_5, a_5 a_6; les forces F étant égales et verticales, les droites a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4, a_4 a_5, a_5 a_6, sont égales et situées suivant une même verticale. Par le point a_1 menons a_1 o parallèle à la direction du dernier côté ; par le point a_6 menons la droite horizontale a_6 o parallèle à A_5 A_6. Les droites oa_2, oa_3, oa_4, oa_5 sont parallèles aux côtés du polygone. Celui-ci peut donc être facilement construit. Les tensions supportées par ses différents côtés nous sont données par la longueur des droites oa_1... oa_6. De plus, oa_1 est égal à la réaction de l'appui fixe.

Cherchons l'équation de la figure d'équilibre du câble. Prenons pour axe des x le côté horizontal, pour axe des y la verticale oy menée par le milieu o de ce côté.

Par les différents sommets du polygone, menons des parallèles à ox ; soient a', a'', a''', a^{IV}, les points où chacune des horizontales menées par les différents sommets du polygone coupe la verticale du sommet suivant, compté à partir du sommet A_6. Menons dans le polygone de Varignon une verticale distante du point o de la longueur a, qui sépare les verticales équidistantes des sommets du polygone : soient b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, les points où cette droite rencontre les droites oa_1, oa_2,... oa_6. Les droites b_6 b_5, b_5 b_4, b_4 b_3,... ont toutes une même longueur b, les triangles ob_5 b_6, ob_4 b_5,...

étant respectivement semblables aux triangles $oa_5 a_6$, $oa_4 a_5$... dans lesquels les côtés $a_6 a_5$, $a_5 a_4$... sont tous égaux à la longueur qui mesure la force F à l'échelle du dessin. Donc, on a :

$$b_6 b_5 = b, \quad b_6 b_4 = 2b, \quad b_6 b_3 = 3b...$$

D'autre part, les triangles $A_4 a' A_5$, $A_3 a'' A_4$, $A_2 a''' A_3$... sont respec-

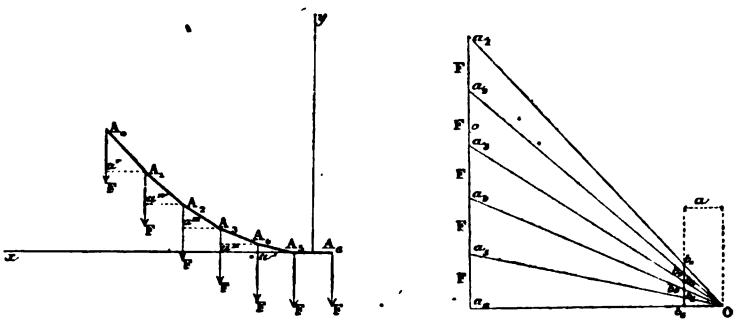

Fig. 109.

tivement égaux aux triangles $ob_6 b_5$, $ob_6 b_4$, $ob_6 b_3$... comme ayant leurs côtés parallèles et un côté égal :

$$a = ob_6 = A_5 a' = A_4 a''...$$

Donc, on a :

$$A_4 a' = b, \; A_3 a'' = 2b, \; A_2 a''' = 3b...$$

Ceci posé, nous voyons que les coordonnées de chacun des sommets du polygone funiculaire ont les valeurs suivantes :
pour le 1er sommet A_5 :

$$x = \frac{1}{2} a \quad y = 0$$

pour le 2e sommet A_4 :

$$x = a + \frac{1}{2} a = \frac{3}{2} a \quad y = b$$

pour le 3e sommet A_3 :

$$x = \frac{3}{2} a + a = \frac{5}{2} a \quad y = b + 2b$$

. . . .

. . . .

pour le n^e sommet :

$$x = \frac{2n-1}{2} a \quad y = b + 2b + \cdots + (n-1) b$$

Les coordonnées du sommet de rang n à partir du milieu du polygone sont donc les suivantes :

$$x = \frac{2n-1}{2} a \quad , \quad y = b + 2b + \cdots + (n-1) b = \frac{b\, n\, (n-1)}{2}$$

Nous allons tirer n de l'expression de x et porter sa valeur dans l'expression de y. Nous aurons ainsi une relation entre x et y et les quantités connues a et b, c'est-à-dire l'équation d'une courbe passant par tous les sommets du polygone funiculaire $A_1 A_2 \ldots A_3$.

De l'expression :

$$x = \frac{2n-1}{2} a$$

nous tirons :

$$\frac{2x}{a} = 2n - 1 \quad 2n = \frac{2x}{a} + 1 = \frac{2x+a}{a}$$

$$n = \frac{2x+a}{2a}$$

Portons cette valeur de n dans y, il vient ;

$$y = \frac{b}{2} \frac{2x+a}{2a} \left(\frac{2x+a}{2a} - 1\right) = \frac{b}{2} \frac{2x+a}{2a} \frac{2x-a}{2a} = \frac{b}{2} \frac{4x^2 - a^2}{4a^2}$$

D'où :

$$\frac{8a^2 y}{b} + a^2 = 4x^2$$

$$x^2 = \frac{2a^2}{b} y + \frac{a^2}{4}$$

équation d'une parabole dont l'axe est vertical ; son sommet se trouve sur l'axe des y, au point dont l'ordonnée β s'obtient en faisant $x = 0$ dans l'équation précédente, ce qui donne :

$$0 = \frac{2a^2}{b} \beta + \frac{a^2}{4}$$

$$\beta = -\frac{b}{8}$$

§ III. — ÉQUILIBRE DES POLYGONES ARTICULÉS.

90. — Définitions. — Plusieurs corps sont dits *articulés* quand ils sont assujettis à avoir constamment certains points communs.

Deux corps A et B sont reliés par une articulation *sphérique* quand à l'un des corps A est adaptée une sphère pleine qui glisse à l'intérieur d'une sphère creuse de même diamètre, invariablement fixée au corps B. Dans ce cas, le centre des deux sphères est le point commun aux deux corps.

Quand au corps A est adapté un cylindre plein assujetti à se mouvoir à l'intérieur d'un cylindre creux de même diamètre fixé au corps B, on dit que l'articulation est cylindrique. L'axe des deux cylindres est commun aux corps A et B.

Si un polygone à articulations sphériques est en équilibre, on peut évidemment sans troubler l'équilibre remplacer les articulations sphériques par des articulations cylindriques.

Nous nous occuperons seulement des conditions d'équilibre des corps réunis par des articulations sphériques.

91. — Conditions d'équilibre d'un polygone à articulations sphériques. — Pour qu'un polygone à articulations sphériques soit en équilibre, il faut et il suffit :

1° Que toutes les forces appliquées aux différents corps articulés satisfassent aux conditions d'équilibre des forces appliquées à un corps solide libre;

2° Que la somme algébrique des moments des forces situées d'un même côté d'un centre d'articulation, par rapport à un axe quelconque passant par ce centre d'articulation, soit nulle.

Les conditions énoncées sont nécessaires. Si l'équilibre a lieu, elles sont satisfaites. En effet, soient A_1, A_2, A_3... les corps articulés (fig. 110), B_1, B_2, B_3... les centres des articulations sphériques qui les réunissent, F_1, F_2, F_3... les forces respectivement appliquées aux corps A_1, A_2, A_3... ; supposons que l'équilibre ait lieu ; nous pouvons, sans le troubler, rendre tous les corps du système invariablement fixés les uns aux autres. Nous rentrons ainsi dans le cas d'un solide soumis à des forces extérieures ; celles-ci doivent satis-

faire aux conditions d'équilibre des forces appliquées à un solide libre.

Considérons maintenant comme entièrement fixe la partie du polygone qui se trouve à droite d'une des articulations, B_3 par exemple. Supposons de plus que tous les corps situés à gauche de B_3 sont invariablement fixés les uns aux autres ; la réunion de ces corps peut être considérée comme formant un solide unique, assujetti à tourner autour d'un point fixe B_3. Si le système entier est en équilibre, le solide ainsi défini l'est également. Les forces qui lui sont appliquées doivent donc satisfaire à la condition d'équilibre d'un solide assujetti à se mouvoir autour d'un point fixe B_3.

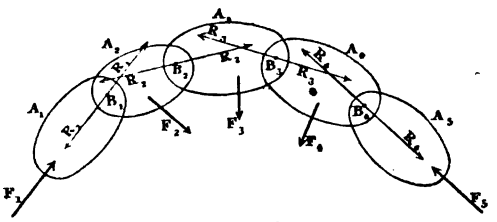

Fig. 110.

On a vu au n° 58 que cette condition consiste en ce que la somme des moments des forces appliquées au solide, pris par rapport à un axe quelconque passant par le point fixe, doit être nulle. Donc, la somme des moments des forces F_1, F_2, F_3, situées d'un même côté d'une articulation B_3, doit être nulle pour un axe quelconque passant par le centre de cette articulation. Les deux conditions énoncées sont donc remplies quand l'équilibre a lieu : elles sont nécessaires.

Les conditions énoncées sont suffisantes. Si elles sont remplies, le polygone articulé est en équilibre. Nous allons d'abord démontrer que, si les conditions sont remplies, toutes les forces situées d'un même côté d'une articulation quelconque B_3, considérées comme appliquées à un corps solide, ont une résultante unique R_3 passant par B_3.

En effet, ces forces, considérées comme appliquées à un même solide, peuvent toujours être composées en une résultante unique R_3 passant par B_3 et en un couple résultant, dont le moment par rapport à un axe quelconque passant par B_3 est égal à la somme des moments des forces composantes, pris par rapport à cet axe (voir n° 73). Comme, par hypothèse, cette somme est nulle pour tout axe passant par B_3, il en est de même du moment du couple

résultant. Par suite ce couple, ayant son moment nul par rapport à un axe quelconque passant par B_3, est nul. Donc l'ensemble des forces situées d'un même côté d'un centre d'articulation quelconque B_3 et supposées appliquées à un même corps solide, se compose en une résultante unique R_3 passant par B_3.

Ceci posé, appliquons à chaque articulation telle que B_3 deux forces contraires et égales aux résultantes telles que R_3 des forces situées à gauche de cette articulation, considérées comme appliquées à un même solide ; la force R_3 est supposée appliquée à A_4 et $-R_3$ à A_3. L'introduction de ces forces ne changera rien aux conditions d'équilibre. En effet, on sait que, pour que l'équilibre ait lieu, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels des forces appliquées au système soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons. Les travaux des forces telles que R_3 et $-R_3$ sont nuls, puisque ces forces sont deux à deux égales et directement opposées. Donc, la somme des travaux virtuels des forces appliquées au système n'est pas changée par l'introduction des forces R_3 et $-R_3$, et par suite les conditions d'équilibre ne sont pas troublées.

Considérons d'abord le corps extrême A_1 comme libre sous l'action des forces F_1 et $-R_1$. Les forces F_1, en vertu de ce que nous venons de démontrer, ont une résultante passant par B_1 et cette résultante est égale à R_1. Donc les forces F_1 et $-R_1$ se font équilibre et le corps A_1 est en équilibre. Le corps A_2 est soumis à l'action des forces F_2, R_1 et $-R_2$; la force R_1 est la résultante des forces appliquées à la gauche de B_1 ; si nous la composons avec la force F_2, nous obtenons un système équivalent à toutes les forces situées à la gauche de B_2. Nous savons que ce système se réduit à la force unique R_2 passant par B_2. Donc le solide A_2, soumis à la force $-R_2$ appliquée en B_2 et à un système de forces équivalent à la force R_2 appliquée au même point, est en équilibre. En continuant ainsi de proche en proche, on verrait que chacun des corps composant le polygone articulé est en équilibre et que par suite il en est de même du polygone articulé dans son ensemble, ce qu'il fallait démontrer.

Les forces R_1, $-R_1$, R_2, $-R_2$,... représentent les réactions des corps les uns sur les autres.

92. — Application. — Equilibre d'une ferme. — Nous allons appliquer les considérations qui précèdent à la recherche des conditions d'équilibre d'une ferme ABCDE que nous supposerons articulée en ses différents sommets et reposant aux points A et E sur des appuis fixes (fig. 111).

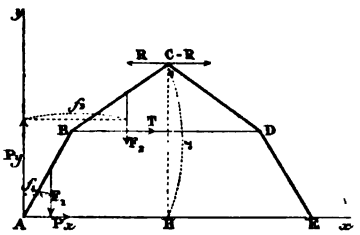

Fig. 111.

Les côtés du polygone articulé ABCDE sont tous situés dans un même plan; ce polygone est de plus symétrique par rapport à la verticale CH du point C. Les forces qui lui sont appliquées sont les poids de ces côtés et les réactions des appuis fixes A et E.

Nous nous proposons de déterminer les réactions de ces appuis, et les conditions de l'équilibre.

Nous remarquerons d'abord que les réactions R, $-R$ exercées par les côtés CD et BC l'un sur l'autre au point C sont, par raison de symétrie, dans le plan de la figure; elles sont pour la même raison symétriques par rapport à la droite CH, et comme d'autre part elles sont égales et directement opposées, il en résulte qu'elles sont perpendiculaires sur CH, c'est-à-dire horizontales.

La ferme étant en équilibre, la demi-ferme ABC est elle-même en équilibre sous l'action des poids F_1, F_2 des côtés AB, BC, de la réaction de l'appui A et de la réaction R exercée sur l'articulation C par la demi-ferme CDE.

Soit P la réaction du point A; menons par A deux axes rectangulaires, l'un horizontal Ax, l'autre vertical Ay; soient P_x, P_y les composantes de P suivant ces deux axes. Ecrivons que les conditions d'équilibre des forces P, F_1, F_2, R appliquées au polygone articulé ABC sont satisfaites.

1° Ces forces doivent satisfaire aux conditions d'équilibre des forces appliquées à un corps solide. La somme des projections des forces sur chacun des trois axes Ax, Ay et Az, ce dernier perpendiculaire au plan de la figure, est nulle, et la somme de leurs moments par rapport à chacun de ces trois axes est nulle également.

Les projections des forces contenues dans le plan de la figure

sur un axe Az, perpendiculaire à ce plan, sont nulles; il en est de même de leurs moments par rapport aux deux axes Ax, Ay, contenus dans ce plan. Donc, les conditions d'équilibre des forces R, F_1, F_2, P, considérées comme appliquées à un corps solide, se réduisent aux suivantes :

La somme des projections des forces sur Ax est nulle. Ce qui nous donne, en comptant positivement les forces de o vers x et vers y :

$$P_x + R = 0 \tag{1}$$

La somme des projections des forces sur Ay est nulle :

$$P_y + F_1 + F_2 = 0 \tag{2}$$

La somme des moments des forces par rapport à Az est nulle. Désignons par f_1, f_2, r les distances des forces F_1, F_2, R au point o; nous avons, en comptant positivement les moments de gauche à droite :

$$-F_1 f_1 - F_2 f_2 + Rr = 0 \tag{3}$$

2° La somme des moments des forces comprises entre l'extrémité C et l'articulation B est nulle par rapport à un axe quelconque passant par ce dernier point. Nous allons faire voir que, pour exprimer cette condition, il suffit d'écrire que la somme de ces moments, pris par rapport à un axe perpendiculaire en B au plan de la figure, est nulle.

En effet, considérons les forces comprises entre l'extrémité C et l'articulation B comme appliquées à un même corps solide. Ces forces sont dans le plan de la figure; elles pourront être décomposées en une résultante de translation passant par B et en un couple, situés dans ce plan; le moment du couple sera égal à la somme des moments des forces considérées par rapport à un axe perpendiculaire en B au plan de la figure. Si cette somme est nulle, le couple sera nul et le système des forces considérées sera équivalent à la résultante de translation passant par B. La somme des moments des forces considérées, par rapport à un axe quelconque passant par B, sera par suite égale au moment de la résultante de translation par rapport au même axe. Et comme cette

résultante passe par le point B, cette somme sera constamment nulle.

Écrivons donc que la somme des moments des forces R et F_2, par rapport à un axe perpendiculaire en B au plan de la figure est nulle.

Nous avons ainsi, en désignant par a, b les coordonnées du point B :

$$R(r-b) - F_2(f_2 - a) = 0 \qquad (4)$$

Les équations (1), (2), (3), (4) sont 4 équations du premier degré entre les réactions inconnues P_x, P_y et R.

Nous pouvons tirer de trois de ces équations les valeurs de ces inconnues, en fonctions des données, qui sont F_1, F_2, f_1, f_2, a, b et r. En portant les valeurs ainsi trouvées de ces inconnues dans la quatrième équation, nous aurons une relation entre les quantités données : cette relation sera la condition d'équilibre. On l'obtient immédiatement en tirant R de l'équation (3) et en portant sa valeur dans l'équation (4) ; on a ainsi :

$$R = \frac{F_1 f_1 + F_2 f_2}{r}$$

Cette valeur de R portée dans (4) nous donne :

$$F_2(f_2 - a) = \frac{r-b}{r}(F_1 f_1 + F_2 f_2)$$

ou :

$$\frac{F_2(f_2 - a)}{r-b} = \frac{F_1 f_1 + F_2 f_2}{r} \qquad (5)$$

Cette équation (5) sera la condition d'équilibre de la ferme. Si elle est satisfaite, l'équilibre a lieu ; si elle n'est pas satisfaite, on peut ajouter au point B une force horizontale T dont on cherchera à déterminer la valeur de telle sorte que l'équilibre ait lieu. On introduira cette force dans les équations qui expriment les conditions d'équilibre. Ces 4 équations renfermeront 4 inconnues P_x, P_y, R et T. Elles nous donneront les valeurs de ces quatre inconnues.

Dans la pratique, la force T sera réalisée par l'établissement d'une tige horizontale reliant les articulations B et D. La valeur trouvée pour T nous donnera la tension supportée par cette tige.

LIVRE III

DYNAMIQUE

CHAPITRE IX

DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL

§ I. — Équations générales du mouvement d'un point. — Application. Mouvement d'un corps soumis à la pesanteur.

§ II. — Théorèmes généraux servant à abaisser dans certains cas du second ordre au premier les équations générales du mouvement. — Définitions. — Théorème I, des quantités de mouvement. — Théorème II, des quantités de mouvement projetées. — Théorème III, des moments des quantités de mouvement. — Théorème IV, des aires. — Théorème V, des forces vives. — Application. Mouvement des planètes autour du soleil.

§ III. — Mouvement d'un point soumis à des liaisons. — Conditions pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan; — à une autre droite. — Mouvement d'un point assujetti à se mouvoir sur une surface fixe; — sur une courbe fixe. — — Application. Pendule simple.

§ I. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN POINT

93. — Objet de la dynamique. — Nous nous proposons dans cette troisième partie de la mécanique d'étudier les relations qui existent entre les forces appliquées aux corps et les mouvements que prennent ces corps sous l'influence de ces forces.

Dans ce chapitre, nous étudierons la question dans le cas d'un point matériel.

94. — Équations générales du mouvement d'un point. — Soit M un point mobile de masse m; nous supposerons qu'il se meut sous l'action d'une force F, connue en fonction du temps et de la position du point. Nous nous proposons de déterminer le mouvement de ce point.

Rapportons le point M à trois axes de coordonnées o x, o y, o z (fig. 112). La position de ce point à un instant quelconque t sera déterminée par ses coordonnées x, y, z.

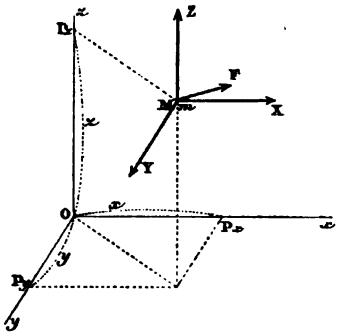

Fig. 112.

Nous avons démontré en cinématique que les projections de l'accélération j du point M sur les trois axes étaient respectivement égales à $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$.

D'autre part, nous avons établi, au début de la statique, que la force F était dirigée à chaque instant suivant l'accélération j et que sa grandeur était égale au produit de cette accélération par la masse m du point considéré.

Il résulte de là que l'accélération j est égale à $\frac{F}{m}$. Les directions de j et de F étant d'ailleurs les mêmes, les projections de j sur les trois axes sont respectivement égales au produit de $\frac{1}{m}$ par les projections de F sur les trois axes. Désignons par X, Y, Z ces projections, qui ne sont autres que les composantes de F suivant les trois axes, nous aurons :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m}, \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m}, \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m}$$

Ou encore :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \qquad (1)$$

En intégrant ces équations différentielles, on aura x, y, z en fonction de t. Si X, Y, Z sont fonctions de t seulement, l'intégration se réduira à une double quadrature (voir n° 13).

Inversement, si on connaît le mouvement du point, les mêmes équations permettront de déterminer la force motrice.

Les équations (1) sont les *équations du mouvement* du point M.

95. — Application. — Mouvement d'un corps soumis à la pesanteur. On imprime à un point matériel pesant une vitesse initiale v_0 faisant un angle α avec l'horizon. On demande le mouvement de ce point (fig. 113).

Le point M est sollicité à chaque instant par la pesanteur dirigée suivant la verticale. Les résultantes successives obtenues en composant les déplacements élémentaires du point dus à la pesanteur d'une part, à l'inertie d'autre part, seront tous dans le plan vertical passant par la droite oA, direction suivant laquelle a été lancé le point. Le point M se déplacera donc dans ce plan. Rapportons son mouvement à deux axes rectangulaires, l'un horizontal ox, l'autre vertical oy situé dans le même plan.

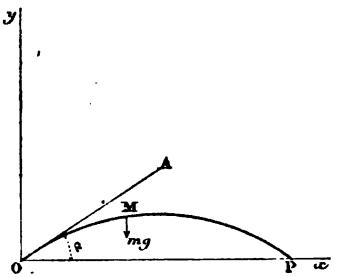

Fig. 113.

Les équations du mouvement rapporté aux axes ox, oy sont :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

La force motrice est la pesanteur ; sa composante horizontale X est nulle. Sa composante verticale a pour valeur $-mg$ (le sens positif de l'axe des y étant de o vers y).

Les équations du mouvement sont donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad (2)$$

La première de ces deux équations nous donne :

$$\frac{dx}{dt} = \text{constante}$$

La valeur de cette constante est facile à trouver. Au moment initial la vitesse du mobile a pour valeur v_0 ; elle fait un angle α avec l'axe des x ; donc $\frac{dx}{dt}$, projection de la vitesse sur ox, a pour valeur initiale $v_0 \cos \alpha$ et comme $\frac{dx}{dt}$ est constant, on a à un instant quelconque :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha$$

intégrons cette dernière équation ; on a :

$$x = v_0\, t \cos \alpha + k \qquad (3)$$

k désigne une constante arbitraire. Pour en trouver la valeur, faisons $t = 0$; au moment initial le mobile est à l'origine o ; on a donc $x = 0$; si nous faisons simultanément $x = 0$, $t = 0$ dans l'équation (3) il reste $k = 0$. Donc, à un moment quelconque t, on a :

$$x = v_0 \, t \cos \alpha \tag{4}$$

Intégrons maintenant l'équation (2), elle nous donne d'abord :

$$\frac{dy}{dt} = -gt + K'$$

Pour déterminer k', faisons $t = 0$; nous avons, au moment initial, $\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha$. Donc à un moment quelconque nous avons :

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha$$

Intégrons cette dernière équation ; nous avons :

$$y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 \, t \sin \alpha + k'' \tag{5}$$

Pour trouver la valeur de la constante arbitraire k'', faisons dans cette équation (5) $t = 0$: nous avons, au moment initial, $y = 0$ puisque le mobile part de l'origine ; donc $k'' = 0$, et l'on a à un moment quelconque :

$$y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 \, t \sin \alpha \tag{6}$$

Les équations (4) et (6) donnant les coordonnées x et y du mobile à un instant quelconque t, on peut considérer le problème comme résolu.

Équation de la trajectoire. — Pour trouver l'équation de la trajectoire, tirons t de l'équation (4) et portons sa valeur dans (6) ; nous avons :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

Cette valeur de t portée dans (6) donne :

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \frac{v_0 \, x \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \tag{7}$$

Cette équation est celle d'une courbe du deuxième degré dans laquelle $h^2 - ab = 0$; cette courbe est une parabole (voir IIe partie, n° 7). Elle

passe par l'origine ; cherchons la tangente en ce point ; nous avons pour valeur du coefficient angulaire de la tangente en un point (x, y) : $\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$; si on fait $x = 0$, on a $\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha$: on voit donc que le coefficient angulaire de la tangente à l'origine est égal à $tg\,\alpha$. En d'autres termes, la parabole est tangente en o à la direction de la vitesse initiale, ce que nous pouvions prévoir d'avance.

Cherchons à quelle distance de l'origine le mobile rencontrera l'horizontale ox ; pour cela, faisons $y = 0$ dans l'équation (7) ; nous avons :

$$x\left(tg\,\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) = 0$$

Ce qui nous donne les abscisses des points d'intersection o et P de la courbe avec ox :

$$x = 0$$

et :

$$x = \frac{v_0^2}{g} 2\,tg\,\alpha \cos^2 \alpha = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\,\alpha$$

Si on se donne la vitesse v_0 et si on veut déterminer l'angle α de telle manière que la portée oP soit maximum, on voit que l'on doit prendre l'angle α tel que $\sin 2\,\alpha$ ait la plus grande valeur possible, c'est-à-dire soit égal à 1, ce qui donne :

$$2\,\alpha = 90^\circ \quad , \quad \alpha = 45^\circ$$

C'est donc avec une vitesse initiale inclinée à 45° sur l'horizontale qu'une arme à feu, par exemple. atteindra sa plus grande portée.

§ II. — THÉORÈMES GÉNÉRAUX

96.— On voit que les équations différentielles du mouvement d'un point, que nous avons déterminées dans le paragraphe précédent, sont du second ordre. Dans plusieurs cas on peut immédiatement établir, entre les forces et les éléments du mouvement d'un point, des équations différentielles du premier ordre, par l'application de quelques théorèmes que nous allons démontrer.

Nous allons d'abord donner quelques définitions.

Nous avons vu au numéro 10 comment on peut décomposer l'accélération totale j d'un point matériel en deux composantes dirigées, l'une suivant la tangente à la trajectoire et ayant pour valeur $\frac{dv}{dt}$, l'autre suivant la normale, et ayant pour valeur $\frac{v^2}{\rho}$; la

première est dite *accélération tangentielle;* la seconde *accélération centripète.*

La force $m\,j$ du point matériel, ayant même direction et même sens que l'accélération j, pourra semblablement être décomposée en deux composantes suivant la tangente et la normale à la trajectoire; la première aura pour valeur $m\frac{dv}{dt}$: on l'appelle *force tangentielle;* la seconde, dont l'intensité sera $m\frac{v^2}{\rho}$, est dite *force centripète.*

On appelle *force d'inertie* d'un point matériel en mouvement, une force égale et directement opposée à sa force motrice. La force d'inertie peut, comme la force motrice, être décomposée en deux composantes, l'une tangente, l'autre normale à la courbe. La première, ayant pour intensité $-m\frac{dv}{dt}$, est appelée *force d'inertie tangentielle.* La seconde, ayant pour intensité $-m\frac{v^2}{\rho}$, est dite *force centrifuge.*

On appelle *quantité de mouvement* d'un point matériel le produit $m\,v$ de sa masse par sa vitesse. On la représente par une droite ayant même direction et même sens que la vitesse. La quantité de mouvement peut être assimilée à une force.

On appelle *impulsion élémentaire* d'une force F pendant le temps dt le produit $F\,dt$. On convient de la représenter par une droite ayant même direction et même sens que la force F.

On appelle *impulsion totale* d'une force F pendant le temps qui s'écoule de t_0 à t, l'intégrale $\int_{t_0}^{t} F\,dt$ des impulsions élémentaires prise entre les limites t_0 et t.

On appelle *force vive* d'un point le demi-produit $\frac{1}{2}\,m\,v^2$ de sa masse par le carré de sa vitesse.

97. — Théorème I, dit des quantités de mouvement. — L'accroissement de quantité de mouvement d'un point matériel pendant un certain intervalle de temps, est égal à l'impulsion totale de la force tangentielle pendant le même temps. — En effet, soit F la force tangentielle; nous avons :

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

D'où :

$$F\,dt = m\,dv$$

Et en intégrant de t_0 à t :

$$\int_{t_0}^{t} F\,dt = mv - mv_0$$

Si on connaît l'expression de la force F en fonction du temps t, on voit qu'on connaît la vitesse v du mobile au moyen d'une simple quadrature.

Le théorème démontré ci-dessus dans le cas d'un point matériel libre est encore vrai dans le cas d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface fixe. En effet, dans ce cas, le point peut être considéré comme libre, moyennant l'adjonction de la réaction normale de la courbe ou de la surface, réaction qui, étant perpendiculaire à la tangente à la trajectoire, ne donne aucune composante tangentielle, et par conséquent n'influe pas sur la force F.

98. — Théorème II, dit des quantités de mouvement projetées. — Si on projette sur un axe fixe la force motrice d'un point matériel en mouvement et la quantité de mouvement de ce point, l'accroissement de la quantité de mouvement projetée, pendant un certain intervalle de temps, est égal à l'impulsion totale, pendant le même temps, de la force motrice projetée sur le même axe. — En effet, soient F la force motrice du point, v sa vitesse, j son accélération; la vitesse v' et l'accélération j' du point projeté, sont respectivement égales aux projections de v et de j (voir n° 12). F étant égale à mj, sa projection F' sera égale au produit de la masse m par l'accélération j' du point projeté :

$$F' = m j'$$

D'autre part, nous savons que l'accélération totale j' d'un point projeté sur un axe, se confond avec son accélération tangentielle $\frac{dv'}{dt}$, sa trajectoire étant rectiligne (voir n° 12) :

$$j' = \frac{dv'}{dt}$$

Donc :

$$F' = m\frac{dv'}{dt}$$

D'où :

$$F\,dt = m\,dv'$$

Et :

$$\int_{t_0}^{t} F\,dt = mv' - mv'_0$$

99. — Théorème III, dit des moments des quantités de mouvement. — L'accroissement pendant un intervalle de temps quelconque du moment des quantités de mouvement, pris par rapport à un axe quelconque, est égal à l'intégrale pendant le même temps des moments des impulsions élémentaires, pris par rapport au même axe. — Soit M un point matériel en mouvement (fig. 114), menons MM′ égal en grandeur, direction et sens à la vitesse v ; MM″ égal de même à la vitesse $v + dv$ au bout du temps dt ; menons M′M″. Nous savons que cette droite représente en grandeur, direction et sens la vitesse acquise élémentaire $j\,dt$ (voir n° 9).

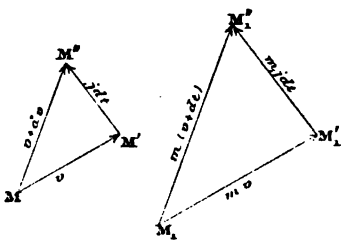

Fig. 114.

Construisons maintenant le triangle $M_1M'_1M''_1$ dont les côtés sont parallèles et de même sens que ceux de MM′M″ et qui ont pour longueurs, les longueurs des côtés du premier triangle respectivement multipliés par m. Nous aurons $M_1M'_1 = mv$, $M_1M''_1 = m\,(v + dv)$ et $M'_1M''_1 = m\,j\,dt = F\,dt$. Nous voyons que $m\,(v + dv)$ est la résultante de $m\,v$ et de $F\,dt$.

Considérons ces trois longueurs comme trois forces, et prenons leurs moments par rapport à un axe quelconque. Nous aurons en écrivant que le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes :

$$\mathcal{M}_o\ m\,(v + dv) = \mathcal{M}_o\ mv + \mathcal{M}_o\ F\,dt$$

ou :

$$\mathcal{M}_o\ m\,(v + dv) - \mathcal{M}_o\ mv = \mathcal{M}_o\ F\,dt$$

ou encore :

$$d\,\mathcal{M}_o\ mv = \mathcal{M}_o\ F\,dt$$

Et en intégrant entre les limites de temps t_0 et t :

$$\mathcal{M}_o\ mv - \mathcal{M}_o\ mv_0 = \int_{t_0}^{t} \mathcal{M}_o\ F\,dt$$

100. — Théorème IV, dit des aires. — Quand un point se meut sous l'action d'une force motrice rencontrant un axe fixe, si à chaque instant on projette le point sur un plan perpendiculaire à l'axe, les rayons vecteurs menés de la projection du point au pied de l'axe décrivent des aires proportionnelles au temps. — Supposons l'axe perpendiculaire au plan de la figure. Projetons sur ce plan l'axe en O et le mobile en M (fig. 115); la force se projettera en O M. Menons la tangente M P à la trajectoire du point M projeté sur le plan de la figure, et abaissons du point O sur cette tangente la perpendiculaire O P $= p$.

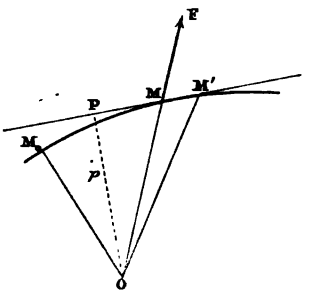

Fig. 115.

Appliquons le théorème du moment des quantités de mouvement en prenant l'axe O pour axe des moments. La force F rencontrant l'axe O, son moment par rapport à cet axe est constamment nul. Par suite, l'accroissement du moment de la quantité de mouvement est constamment nul. En d'autres termes, ce moment est constant, et l'on a :

$$\mathcal{M}_o\ mv = C$$

en désignant par C une quantité constante.

Le moment de mv est égal à la projection de la quantité de mouvement mv sur un plan perpendiculaire à l'axe O des moments, multipliée par la distance du point O à cette projection. La vitesse v se projette suivant M P, tangente à la trajectoire du mobile projeté ; la distance du point O à M P est égale à p. D'ailleurs la projection de mv est égale à mv', v' désignant la vitesse du mobile projeté. On a donc :

$$\mathcal{M}_o\ mv = p \times mv'$$

D'ailleurs, en désignant par ds l'arc M M′ parcouru pendant le temps dt par le point M, projection du mobile de l'espace, nous avons :

$$v' = \frac{ds}{dt}$$

et par suite :

$$\mathcal{M}_0 \; mv = m\,p \times \frac{ds}{dt} = C \qquad (1)$$

Désignons par A l'aire M_0 OM décrite par le rayon vecteur OM à partir d'une position initiale O M_0. Nous avons :

$$dA = \frac{1}{2}\,MM' \times p = \frac{1}{2}\,p\,ds$$

Donc l'équation (1) peut s'écrire :

$$2m\,\frac{dA}{dt} = C$$

D'où :

$$dA = \frac{C\,dt}{2m}$$

$$A = \frac{C}{2m}\,(t - t_0)$$

ou $A = \frac{C}{2m}\,t$, en supposant $t_0 = 0$, c'est-à-dire en supposant que nous prenons pour origine du temps le moment où le mobile se projette en M_0 sur le plan de la figure; cette dernière égalité démontre la proposition énoncée.

101. — Réciproquement, si, lorsqu'on projette sur un plan la trajectoire d'un mobile de l'espace, les aires décrites par les rayons menés d'un point du plan aux différentes positions du mobile projeté sont proportionnelles au temps, la force motrice du mobile rencontre constamment un axe perpendiculaire au plan au point considéré. — En effet, si, en reprenant les notations du numéro précédent, nous avons :

$$A = C_1\,t$$

C_1 désignant une constante, nous aurons en posant $C_1 = \frac{C}{2m}$:

$$m\,dA = \frac{C}{2}\,dt$$

$$m\,p\,ds = C\,dt$$

$$m\,p\,\frac{ds}{dt} = C$$

ou, ce qui revient au même :

$$\mathcal{M}_o\ mv = C$$

le moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe O étant constant, le moment de l'impulsion élémentaire à un instant quelconque, pris par rapport au même axe, est constamment nul (n° 99); ce qui exige nécessairement que cette impulsion élémentaire, et par suite la force motrice du mobile, rencontre constamment l'axe O des moments.

102. — Théorème V, dit des forces vives. — L'accroissement pendant un intervalle de temps quelconque de la force vive d'un point matériel, libre ou assujetti à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface, est égal au travail de la force motrice pendant le même temps. — En effet, le travail élémentaire de la force motrice et des forces de liaison pendant un intervalle de temps dt est égal au travail de la force tangentielle pendant le même temps, car, la force centripète étant perpendiculaire au déplacement de son point d'application, son travail est nul, et il en est de même, dans le cas des liaisons énoncées, du travail des réactions normales de la courbe ou de la surface.

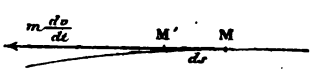

Fig. 116.

Ceci posé, le travail élémentaire de la force tangentielle $m\,\frac{dv}{dt}$ est égal à cette force multipliée par le déplacement ds de son point d'application (fig. 116), et l'on a, en désignant par $d\,\mathcal{T}$ ce travail élémentaire :

$$d\,\mathcal{T} = m\,\frac{dv}{dt} \times ds = m\,dv\,\frac{ds}{dt}$$

Mais d'ailleurs :

$$\frac{ds}{dt} = v$$

et par suite :

$$d\,\mathcal{T} = mv\,dv = d\,\frac{1}{2}\,mv^2$$

et en intégrant de l'instant t_0 à l'instant t :

$$\int_{t_0}^{t} d\,\mathcal{T} = \frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{1}{2}\,mv_0^2$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

103. — Désignons par X, Y, Z les composantes de la force F suivant trois axes de coordonnées rectangulaires. Nous avons vu (n° 57) que l'on a :

$$d\,\mathcal{T} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

x, y, z désignant les coordonnées du mobile de l'espace auquel la force F est appliquée.

Le théorème des forces vives nous donne donc, l'intégrale étant prise entre des limites correspondant aux limites de temps t_0 et t :

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{1}{2}\,mv_0^2 = \int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

Si X, Y, Z sont des fonctions connues de x, y, z et que $Xdx + Ydy + Zdz$ soit la différentielle d'une fonction connue $f\,(x, y, z)$, l'équation des forces vives peut être immédiatement intégrée :

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{1}{2}\,mv_0^2 = \int d\,f\,(x, y, z) = f\,(x, y, z) - f\,(x_0, y_0, z_0)$$

Il y a deux cas simples dans lesquels cette double condition est satisfaite :

1° *La force motrice est constante en intensité et en direction.*

Prenons l'axe des z parallèle à cette force; on a $X = 0$, $Y = 0$. $Z = C$, C désignant une constante, donc :

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = C\,dz$$

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{1}{2}\,mv_0^2 = C\,(z - z_0)$$

2° *La force motrice passe par un point fixe, et est une fonction connue de la distance du mobile à ce point fixe.* En effet, soit o le point fixe, M une position du mobile, M′ sa position au bout du temps dt (fig. 117), soit r la distance oM, $r + dr$ la distance oM′. Le travail élémentaire de la force F est égal à l'intensité de cette force F multipliée par la projection M′M″ du déplacement élémentaire du point d'application M sur la direction de la force. Mais oM″,

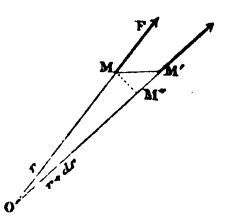

Fig. 117.

projection de oM sur la direction infiniment voisine oM′, est égale à oM à un infiniment petit du second ordre près; M″M′ est donc égal à dr et si, d'autre part, la force F est une fonction connue $\varphi(r)$ de la distance r, on a :

$$d\mathcal{T} = \varphi(r)\,dr$$

Et par suite :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{r_0}^{r} \varphi(r)\,dr$$

la question se ramène à une simple quadrature.

On voit que les théorèmes que nous venons de démontrer ont pour résultat, dans un grand nombre de cas, de remplacer les équations différentielles où figurent les accélérations, qui sont du deuxième ordre par rapport au temps, par des équations ne renfermant que les vitesses, lesquelles sont du premier ordre seulement. On n'a plus qu'une intégration au lieu de deux à effectuer pour trouver le mouvement du point.

104. — Application. — Un point matériel M de masse m est attiré vers un point fixe o par une force F proportionnelle à la masse m, et inversement proportionnelle au carré de la distance r du point M au centre d'attraction. — On demande de déterminer le mouvement du point? (Mouvement des planètes autour du soleil.)

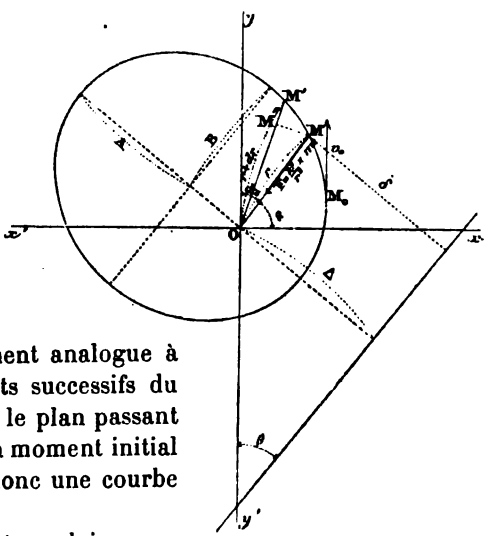

Fig. 118.

Soit M la position du mobile au bout du temps t; soit o le centre d'attraction (fig. 118).

Nous verrons par un raisonnement analogue à celui du n° 95 que les déplacements successifs du mobile seront tous contenus dans le plan passant par le point o et la vitesse v_0 à un moment initial quelconque. La trajectoire sera donc une courbe plane.

Rapportons-la à deux axes rectangulaires ox, oy situés dans son plan. Nous prendrons le centre d'attraction o pour origine des coordonnées. Désignons par r la distance

oM comptée positivement de o vers M; par α l'angle M ox compté positivement dans le sens x oy. La force F aura pour intensité, en valeur absolue $\frac{mk^2}{r^2}$, k^2 désignant un coefficient constant. Comme nous la supposons attractive, c'est-à-dire dirigée de M vers o, nous devons lui donner le signe — :

$$F = -m\frac{k^2}{r^2}$$

La force motrice passant par un point fixe, le théorème des aires est applicable. Les aires décrites par le rayon vecteur oM sont proportionnelles aux temps. Supposons que le mobile, étant en M à l'instant t, soit en M' à l'instant $t + dt$. Désignons par $d\mathcal{A}$ l'aire élémentaire M o M', par c un coefficient constant; nous aurons, en appliquant le théorème des aires pendant le temps dt :

$$d\mathcal{A} = c\,dt \tag{1}$$

Évaluons $d\mathcal{A}$ en fonction de r et de α; à cet effet, abaissons M M" perpendiculaire sur o M' ; nous avons :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\mathrm{oM'} \times \mathrm{MM''}$$

Mais le triangle rectangle o M M' dans lequel l'angle M o M" ou $d\alpha$ est infiniment petit, nous donne :

$$\mathrm{MM''} = \mathrm{oM}\,\sin d\alpha = \mathrm{oM}\,d\alpha = r\,d\alpha$$

Nous avons d'ailleurs O M' $= r + dr$, et par conséquent :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\mathrm{oM'} \times \mathrm{MM''} = \frac{1}{2}(r + dr)\,r d\alpha = \frac{1}{2}r^2\,d\alpha + \frac{1}{2}r\,d\alpha\,dr$$

Et, en négligeant les infiniment petits du second ordre :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2\,d\alpha \tag{2}$$

Égalons les expressions (1) et (2) de $d\mathcal{A}$; nous avons :

$$cdt = \frac{1}{2}r^2\,d\alpha$$

Ce qui peut s'écrire :

$$dt = \frac{1}{2c}r^2\,d\alpha \tag{3}$$

Nous avons ainsi une première relation entre les trois variables r, α, et t. Pour en trouver une seconde, appliquons le théorème des forces vives. Nous savons (voir n° 103) que, la force F passant par un point fixe o, et étant fonction de sa distance r à ce point fixe, l'intégrale des forces vives existe. Nous avons :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{r_0}^{r} F\,dr = \int_{r_0}^{r} -m\frac{k^2}{r^2}\,dr = mk^2\int_{r_0}^{r} -\frac{dr}{r^2}$$

Nous savons d'ailleurs que l'intégrale de $-\frac{dr}{r^2}$ ou $-r^{-2}\,dr$ est r^{-1} ou $\frac{1}{r}$ (voir Ire partie, n° 81) ; nous avons par suite :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mk^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

De là nous déduisons, en divisant par $\frac{m}{2}$ les deux membres, et en faisant passer v_0^2 dans le second membre :

$$v^2 = v_0^2 + 2k^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{4}$$

Posons, pour abréger les notations :

$$h = v_0^2 - \frac{2k^2}{r_0} \tag{5}$$

L'équation (4) peut alors s'écrire :

$$v^2 = h + \frac{2k^2}{r} \tag{6}$$

Nous savons d'ailleurs que v^2 est égal à $\frac{ds^2}{dt^2}$, en désignant par ds l'axe M M' parcouru par le mobile pendant le temps dt. Cherchons à exprimer ds en fonction de dr et de $d\alpha$.

Le triangle infiniment petit M M' M'' nous donne :

$$\overline{MM''}^2 = ds^2 = \overline{M'M''}^2 + \overline{MM''}^2 \tag{7}$$

O M'' est égal à $r \cos d\alpha$ ou à r, à un infiniment petit du second ordre près ; O M', est égal à $r + dr$; M' M'' est donc égal à dr ; nous avons vu plus haut que M M'' était égal à $r\,d\alpha$. L'équation (7) peut donc s'écrire :

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\alpha^2 \tag{8}$$

Et par suite on a, en tenant compte de l'équation (6) :

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = h + \frac{2k^2}{r} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \tag{9}$$

D'ailleurs l'équation (3) nous donne :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{2c}{r^2}$$

Portons cette valeur de $\frac{d\alpha}{dt}$ dans l'équation (9), nous avons :

$$h + \frac{2k^2}{r} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{4c^2}{r^2}$$

D'où nous tirons :

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{h + \frac{2k^2}{r} - \frac{4c^2}{r^2}} \tag{10}$$

Et par suite :

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{h + \frac{2k^2}{r} - \frac{4c^2}{r^2}}} \tag{11}$$

L'équation (11) est une relation entre t et r d'où nous pouvons tirer t en fonction de r par une simple quadrature. De plus l'équation (3) nous donne une relation entre α, r et t ; si entre ces deux équations (11) et (3) nous pouvons éliminer t, nous aurons une relation entre r et α, qui nous donnera le rayon vecteur o M en fonction de l'angle M ox, et qui déterminera par suite la trajectoire. Connaissant t et α en fonction de r, nous connaîtrons à chaque instant les positions du point mobile, et par suite son mouvement.

Pour éliminer t entre les équations (3) et (11), il suffit d'égaler les expressions de dt données par ces deux équations. Nous avons ainsi :

$$\frac{1}{2c} r^2 \, d\alpha = \frac{dr}{\sqrt{h + \frac{2k^2}{r} - \frac{4c^2}{r^2}}}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$d\alpha = \frac{2c \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{h + \frac{2k^2}{r} - \frac{4c^2}{r^2}}} \tag{12}$$

La quantité qui figure sous le radical dans le second membre de l'équation (12) peut s'écrire, en ajoutant et en retranchant $\frac{k^4}{4c^2}$:

$$h + \frac{2k^2}{r} - \frac{4c^2}{r^2} = h + \frac{k^4}{4c^2} - \frac{k^4}{4c^2} + \frac{2k^2}{r} - \frac{4c^2}{r^2} = h + \frac{k^4}{4c^2} - \left(\frac{2c}{r} - \frac{k^2}{2c}\right)^2 \tag{13}$$

Posons pour abréger :

$$h + \frac{k^4}{4c^2} = a^2 \tag{14}$$

$$\frac{2c}{r} - \frac{k^2}{2c} = u \tag{15}$$

Nous aurons en différentiant l'équation (15) :

$$-\frac{2c\,dr}{r^2} = du \tag{16}$$

Le second membre de l'équation (13), c'est-à-dire la quantité sous le radical dans le second membre de l'équation (12), peut donc s'écrire :

$$h + \frac{k^4}{4c^2} - \left(\frac{2c}{r} - \frac{k^2}{2c}\right)^2 = a^2 - u^2$$

Et l'équation (13) devient :

$$d\alpha = \frac{-du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \tag{17}$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$d\alpha = \frac{-\frac{du}{a}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}}}$$

Et, en posant $\frac{u}{a} = z$:

$$d\alpha = \frac{-dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

En intégrant, on a :

$$\alpha = \int \frac{-dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

Nous sommes ainsi ramenés à une intégrale connue, qui est *arc cos z* (voir Ire partie, n° 81). En désignant par θ une constante, nous aurons :

$$\alpha = arc\ cos\ z + \theta$$

et par suite :

$$z = cos\ (\alpha - \theta)$$

Et, en remplaçant z par sa valeur $\frac{u}{a}$:

$$z = \frac{u}{a} = \frac{1}{a}\left(\frac{2c}{r} - \frac{k^2}{2c}\right) = cos\ (\alpha - \theta)$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\frac{2c}{r} = \frac{k^2}{2c} + a\ cos\ (\alpha - \theta) \tag{18}$$

ou, en multipliant par $\frac{2cr}{k^2}$ les deux membres :

$$\frac{4c^2}{k^2} = r + \frac{2ac}{k^2} r \cos(\alpha - \theta)$$

d'où :

$$r = \frac{4c^2}{k^2} - \frac{2ac}{k^2} r \cos(\alpha - \theta) = \frac{2ac}{k^2}\left(\frac{2c}{a} - r \cos(\alpha - \theta)\right)$$

Développons $\cos(\alpha - \theta)$; il vient :

$$r = \frac{2ac}{k^2}\left(\frac{2c}{a} - r \cos\alpha \cos\theta - r \sin\alpha \sin\theta\right)$$

et, en remarquant que l'on a $r \cos\alpha = x$, $r \sin\alpha = y$:

$$r = \frac{2ac}{k^2}\left(\frac{2c}{a} - x \cos\theta - y \sin\theta\right) \tag{19}$$

Si on égale à zéro la quantité entre parenthèses dans le second membre de l'équation (19), on a l'équation d'une ligne droite :

$$\frac{2c}{a} - x \cos\theta - y \sin\theta = 0 \tag{20}$$

La distance δ du point x, y à la droite (20) a (voir IIe partie, n° 29) pour expression :

$$\delta = \frac{\frac{2c}{a} - x \cos\theta - y \sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}} = \frac{2c}{a} - x \cos\theta - y \sin\theta \tag{21}$$

L'équation (19) peut donc s'écrire :

$$r = \frac{2ac}{k^2}\delta$$

Cette dernière équation nous montre que les distances r et δ d'un point quelconque de la trajectoire cherchée, au point fixe o et à la droite fixe (20) sont dans un rapport constant. Cette trajectoire est donc une courbe du second degré ayant pour foyer le centre d'attraction o et pour directrice la droite (20).

Voyons comment est située cette droite. Son coefficient angulaire a pour valeur $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, c'est-à-dire $tg\,(90° - \theta)$. Elle fait donc avec ox un angle complémentaire de l'angle θ, ou, ce qui revient au même, elle fait un angle égal à θ avec oy. Sa distance à l'origine nous est donnée par l'expression (21) de δ, dans laquelle nous annulerons x et y. Cette distance est donc égale à $\frac{2c}{a}$.

Cherchons maintenant à déterminer les éléments de la trajectoire et examinons d'abord si c'est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Nous savons qu'elle rentrera dans l'une ou l'autre de ces trois classes de courbes suivant que le rapport $\frac{2ac}{k^2}$ de r à δ sera inférieur, supérieur ou égal à l'unité[1]. Désignons par e ce rapport et évaluons-le en fonction des données de la question, qui sont k^2, v_0 et r_0. Nous avons en remplaçant a par sa valeur tirée de l'équation (14) :

$$e = \frac{2ac}{k^2} = \frac{2c}{k^2}\sqrt{h + \frac{k^4}{4c^2}}$$

Et, en élevant au carré :

$$e^2 = \frac{4c^2}{k^4}\left(h + \frac{k^4}{4c^2}\right) = \frac{4c^2h}{k^4} + 1 \qquad (22)$$

Nous voyons que e^2 et par suite e sera inférieur, supérieur ou égal à l'unité, suivant que la fraction $\frac{4c^2h}{k^4}$ sera négative, positive ou nulle, et comme le signe de cette fraction est le même que celui de h, la trajectoire sera une ellipse si on a $h < 0$, une hyperbole si on a $h > 0$, et une parabole dans le cas $h = 0$. L'inégalité $h < 0$ nous donne en remplaçant h par sa valeur tirée de l'équation (5) :

$$v_0^2 - \frac{2k^2}{r_0} < 0 \text{ ou } v_0^2 < \frac{2k^2}{r_0}$$

telle est la relation à laquelle doivent satisfaire les données pour que la trajectoire soit une ellipse. Si on a :

$$v_0^2 - \frac{2k^2}{r_0} > 0 \text{ ou } v_0^2 > \frac{2k^2}{r_0}$$

la courbe est une hyperbole. Dans le cas :

$$v_0^2 = \frac{2k^2}{r_0}$$

la trajectoire est une parabole.

Déterminons maintenant les axes de l'ellipse, en fonction des données. Soit A le demi-axe, perpendiculaire à la directrice (c'est le grand axe dans le cas de l'ellipse, l'axe réel dans le cas de l'hyperbole), B la demi-lon-

[1] En effet, le rapport $e = \frac{r}{\delta}$ est l'inverse du rapport que nous avons appelé k aux nos 32 et 34 de la IIe partie ; or, nous avons trouvé pour ce dernier rapport la valeur $\frac{A}{C}$ en désignant : par A le demi-grand axe de l'ellipse ou le demi-axe réel de l'hyperbole ; par C la quantité $\sqrt{A^2 - B^2}$ pour l'ellipse, $\sqrt{A^2 + B^2}$ pour l'hyperbole. Dans le premier cas, on a $C < A$ et $e = \frac{C}{A} < 1$; dans le second cas, $C > A$, $e = \frac{C}{A} > 1$.

gueur de l'autre axe, C la longueur $\sqrt{A^2 \pm B^2}$ (le signe — correspond à l'ellipse, le signe + à l'hyperbole). Nous savons que l'on a :

$$e = \frac{C}{A} \tag{23}$$

Le centre de la courbe est sur la perpendiculaire abaissée du foyer o sur la directrice, à une distance C du foyer ; la distance de ce centre à la directrice a pour expression $\frac{A^2}{C}$ (voir IIe partie). Si nous désignons par Δ la distance $\frac{2c}{a}$ du foyer o à la directrice, prise en grandeur absolue, nous avons :

$$\Delta = \frac{A^2}{C} - C = \frac{A^2 - C^2}{C}$$

Remplaçons C par sa valeur Ae tirée de l'équation (23), nous avons :

$$\Delta = \frac{A^2 - A^2 e^2}{Ae} = A \frac{1 - e^2}{e}$$

Et par suite :

$$A = \frac{\Delta e}{1 - e^2} \tag{24}$$

Remplaçons dans l'égalité (24) Δ et e par leurs valeurs $\frac{2c}{a}$ et $\frac{2ac}{k^2}$:

$$A = \frac{\frac{2c}{a} \times \frac{2ac}{k^2}}{1 - \frac{4a^2 c^2}{k^4}} = \frac{\frac{4c^2}{k^2}}{\frac{k^4 - 4a^2 c^2}{k^4}} = \frac{4c^2 k^2}{k^4 - 4a^2 c^2} = \frac{k^2}{\frac{k^4}{4c^2} - a^2}$$

Mais l'équation (14) nous donne :

$$\frac{k^4}{4c^2} - a^2 = -h$$

Et l'équation précédente devient :

$$A = -\frac{k^2}{h} \tag{25}$$

Connaissant A et e, nous déterminerons sans peine B :

$$B = \sqrt{A^2 - C^2} = \sqrt{A^2 - A^2 e^2} = A\sqrt{1 - e^2}$$

Nous pourrons donc facilement construire la trajectoire.

Pour trouver la position qu'occupe à chaque instant le point M sur sa trajectoire, nous allons chercher à intégrer l'équation (11) :

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{h + \frac{2k^2}{r} - \frac{4c^2}{r^2}}}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{hr^2 + 2k^2 r - 4c^2}} \tag{26}$$

La quantité sous le radical peut elle-même s'écrire comme il suit :

$$hr^2 + 2k^2 r - 4c^2 = h\left[\left(r + \frac{k^2}{h}\right)^2 - \frac{k^4}{h^2} - \frac{4c^2}{h}\right]$$

$$= h\left[\left(r + \frac{k^2}{h}\right)^2 - \frac{k^4}{h^2}\left(1 + \frac{4c^2 h}{k^4}\right)\right]$$

En remplaçant $\frac{k^2}{h}$ par sa valeur $-A$ tirée de l'équation (25) et $1 + \frac{4c^2 h}{k^4}$ par sa valeur e^2, tirée de l'équation (22), on a pour expression de la quantité sous radical dans l'équation (26) :

$$h\left[\left(r - A\right)^2 - A^2 e^2\right] = -\frac{k^2}{A}\left[\left(r - A\right)^2 - A^2 e^2\right] = \frac{k^2}{A}\left[A^2 e^2 - \left(r - A\right)^2\right]$$

L'équation (26) peut alors s'écrire en multipliant les deux termes du second membre par $\sqrt{\frac{A}{k^2}}$:

$$dt = \frac{\sqrt{\frac{A}{k^2}}\, r\,dr}{\sqrt{A^2 e^2 - \left(A - r\right)^2}} = \frac{\frac{\sqrt{A}}{k A e}\, r\,dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{A - r}{Ae}\right)^2}} \tag{27}$$

Posons :

$$\frac{A - r}{A e} = \cos\varphi$$

Nous avons :

$$A - r = Ae\cos\varphi$$

ou :

$$r = A - Ae\cos\varphi$$

Et en différentiant :

$$dr = -Ae \times (-\sin\varphi\, d\varphi) = Ae\sin\varphi\, d\varphi$$

Remplaçons r et dr par leurs valeurs dans l'équation (27); il vient :

$$dt = \frac{\frac{\sqrt{A}}{k Ae}(A - Ae\cos\varphi)\, Ae\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi}}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$dt = \frac{\sqrt{A^3}}{k}\,\frac{(\sin\varphi - e\sin\varphi\cos\varphi)}{\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{\sqrt{A^3}}{k}\left[d\varphi - e\cos\varphi\, d\varphi\right]$$

Nous sommes ramenés à deux intégrales connues : l'intégrale de $d\varphi$, qui est φ, et l'intégrale de $\cos \varphi \, d\varphi$ qui est $\sin \varphi$. Nous avons donc, en désignant par τ une constante :

$$t = \tau + \frac{\sqrt{A^3}}{k} (\varphi - e \sin \varphi) \tag{28}$$

En appliquant le théorème des aires pendant la durée T d'une révolution entière de point M autour du centre d'attraction o, nous avons, dans le cas où la trajectoire est une ellipse, en désignant par $\mathcal{A}$ la surface de cette ellipse :

$$c\,T = \mathcal{A} = \pi\, AB \tag{29}$$

Nous avons d'ailleurs :

$$B = A\sqrt{1 - e^2}$$

L'équation (29) peut donc s'écrire :

$$c\,T = \pi\, A^2 \sqrt{1 - e^2}$$

Elevons au carré les deux membres de cette équation, et divisons par c^2. Il vient :

$$T^2 = \frac{\pi^2 A^4 (1 - e^2)}{c^2} = \pi^2 A^3 \frac{A\,(1 - e^2)}{c^2} \tag{30}$$

L'équation (24), nous donne d'ailleurs :

$$A\,(1 - e^2) = \Delta\, e = \frac{2c}{a} \times \frac{2ac}{k^2} = \frac{4c^2}{k^2}$$

Remplaçons dans l'équation (30) $A\,(1-e^2)$ par $\frac{4\,c^2}{k^2}$, il vient :

$$T^2 = \pi^2 A^3 \frac{\frac{4c^2}{k^2}}{c^2} = \frac{4\pi^2}{k^2} A^3 \tag{31}$$

Cette relation entre T et A nous montre que le carré de la durée d'une révolution est proportionnel au cube du grand axe de la trajectoire.

Lois de Képler. — Les lois du mouvement du point M autour du centre o d'attraction sont celles du mouvement des planètes dans leurs révolutions autour du soleil. On peut les énoncer comme il suit :

I. — Les orbites des planètes sont des courbes du second degré, dont le soleil occupe un foyer.

II. — Les aires parcourues par un rayon vecteur joignant à chaque instant le soleil à une planète, sont proportionnelles au temps (théorème des aires).

III. — Les carrés des durées des révolutions sont proportionnels aux cubes des grands axes des orbites.

Ces trois lois ont été formulées pour la première fois par Képler.

§ III. — MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL ASSUJETTI A DES LIAISONS

105. — Nous savons qu'un point matériel assujetti à des liaisons peut être considéré comme libre si on ajoute les forces de liaison aux forces qui lui sont directement appliquées.

On écrira les équations générales du mouvement, en y faisant intervenir les forces de liaison. Ces équations, jointes aux équations de liaison, serviront à trouver le mouvement du point.

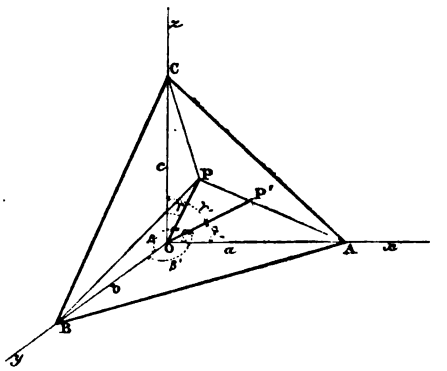

Fig. 119.

Nous étudierons en particulier le mouvement d'un point assujetti à se mouvoir sur une surface fixe ou sur une courbe fixe. A cet effet, nous commencerons par rechercher les conditions analytiques qui expriment qu'une droite est perpendiculaire à un plan ou à une autre droite.

106. — Condition pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan. — Soit :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

l'équation d'un plan, en coordonnées rectangulaires. Soient A, B, C les points d'intersection de ce plan avec les axes ox, oy, et oz (fig. 119). Désignons par a, b, c les longueurs oA, oB, oC. Nous savons que les coefficients A, B, C des variables x, y, z dans l'équation du plan, sont proportionnels aux quantités $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ (voir Ire partie, n° 75).

On a :

$$\frac{A}{\frac{1}{a}} = \frac{B}{\frac{1}{b}} = \frac{C}{\frac{1}{c}} \qquad (2)$$

Abaissons de l'origine une droite oP perpendiculaire sur le plan ABC. Joignons PA, PB, PC. Les triangles oPA, oPB, oPC, tous trois rectangles en P, nous donnent :

$$oP = a \cos \alpha = b \cos \beta = c \cos \gamma$$

On a donc :

$$\frac{\cos \alpha}{\frac{1}{a}} = \frac{\cos \beta}{\frac{1}{b}} = \frac{\cos \gamma}{\frac{1}{c}} \tag{3}$$

Les équations (2) et (3) nous donnent :

$$\frac{\cos \alpha}{A} = \frac{\cos \beta}{B} = \frac{\cos \gamma}{C} \tag{4}$$

Telle est la relation cherchée.

Les angles α, β, γ d'une droite quelconque oP avec les axes satisfont en outre à la relation suivante, obtenue en écrivant que oP est la résultante géométrique des trois composantes rectangulaires oP $\cos \alpha$, oP $\cos \beta$, oP $\cos \gamma$ (voir n° 7).

$$\overline{oP}^2 = \overline{oP}^2 \cos^2 \alpha + \overline{oP}^2 \cos^2 \beta + \overline{oP}^2 \cos^2 \gamma$$

D'où

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \tag{5}$$

107. — Condition pour que deux droites soient perpendiculaires l'une sur l'autre. — Soit oP l'une des deux droites (fig. 119); soient α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes supposés rectangulaires ; par l'origine o menons une droite oP′ parallèle à la seconde droite ; soient α', β', γ' les angles de la droite oP′ avec les axes. Pour que cette droite soit perpendiculaire à oP, il suffit qu'elle soit contenue dans un plan perpendiculaire à oP, mené par l'origine. Soit :

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{1}$$

ce plan. Les coefficients A, B, C doivent satisfaire à la relation trouvée au numéro précédent :

$$\frac{\cos \alpha}{A} = \frac{\cos \beta}{B} = \frac{\cos \gamma}{C} \tag{2}$$

Pour que la droite oP′ soit dans le plan (1), il faut et il suffit que deux de ses points soient contenus dans ce plan. L'origine des coordonnées s'y trouve, l'équation (1) ne renfermant pas de terme

constant. Ecrivons en outre que le point P′ situé sur l'origine à une distance de l'origine oP′ = 1, s'y trouve également. Les coordonnées x_1, y_1, z_1 de P′ ont pour expression :

$$x_1 = \text{oP}' \cos \alpha' = \cos \alpha'$$
$$y_1 = \text{oP}' \cos \beta' = \cos \beta'$$
$$z_1 = \text{oP}' \cos \gamma' = \cos \gamma'$$

Le point x_1, y_1, z_1, devant se trouver dans le plan (1), on doit avoir :

$$A \cos \alpha' + B \cos \beta' + C \cos \gamma' = 0 \qquad (3)$$

Et en remplaçant dans l'équation (3), A, B, C par les quantités proportionnelles $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ (voir équation 2) :

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0 \qquad (4)$$

Telle est la relation cherchée.

108. — Mouvement d'un point assujetti à se mouvoir sur une surface fixe. — Soit :

$$f_1(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

l'équation de la surface. Le point donné peut être considéré comme libre si à la force motrice F qui lui est appliquée, on ajoute la réaction N de la surface. Désignons par X, Y, Z, les composantes de F suivant trois axes de coordonnées rectangulaires, par α, β, γ, les angles de N avec les trois axes. Nous aurons, en appliquant les équations générales du mouvement d'un point matériel libre :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X + N \cos \alpha \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + N \cos \beta \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N \cos \gamma \qquad (2)$$

Exprimons que N est perpendiculaire au plan tangent en x, y, z, à la surface (1). L'équation de ce plan tangent est la suivante (voir Ire partie, n° 76), en désignant par l, m, n, les coordonnées de l'un quelconque de ses points

$$n - z = \frac{dz}{dx}(l - x) + \frac{dz}{dy}(m - y) \qquad (3)$$

$\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, sont les dérivées de z, considéré successivement, soit comme fonction de x seulement, y étant supposé constant, soit

comme fonction de y seulement, x étant supposé constant; ces dérivées ont pour valeurs (voir Ire partie, n° 56) :

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{dz}}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{df_1}{dy}}{\frac{df_1}{dz}}$$

Portons, dans l'équation (3) du plan tangent, ces valeurs de $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$; cette équation devient :

$$\frac{df_1}{dx}(l - x) + \frac{df_1}{dy}(m - y) + \frac{df_1}{dz}(n - z) = 0$$

Écrivons que la réaction N est perpendiculaire sur ce plan : nous avons, en vertu de la condition trouvée au n° 106 :

$$\frac{\frac{df_1}{dx}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{df_1}{dy}}{\cos\beta} = \frac{\frac{df_1}{dz}}{\cos\gamma} \tag{4}$$

Les angles α, β, γ satisfont en outre à la relation :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{5}$$

L'équation (1), les trois équations (2), les deux équations (4) et l'équation (5) nous donnent ainsi sept équations entre les huit variables $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, N$, et t. En supposant t connu, nous aurons sept équations à sept inconnues que nous pourrons résoudre; nous aurons ainsi x, y, z en fonction du temps et nous pourrons déterminer le mouvement du point.

109. — Mouvement d'un point assujetti à se mouvoir sur une courbe fixe. — Supposons la courbe déterminée par l'intersection des deux surfaces

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 0 \\ f_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Désignons par N la réaction normale de la courbe, par α, β, γ les angles que fait N avec les axes supposés rectangulaires. Le point peut être considéré comme libre sous l'action de sa force motrice F et de la réaction N. Appliquons les équations générales du mouvement d'un point matériel libre, en désignant par X, Y, Z les composantes de F suivant les trois axes. Nous avons :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\alpha \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\beta \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\gamma \tag{2}$$

Ecrivons que N est perpendiculaire à la tangente à la courbe donnée, au point dont les coordonnées sont x, y, z. Si nous considérons un point infiniment voisin ayant pour coordonnés $(x + dx)$, $(y + dy)$, $(z + dz)$, l'arc infiniment petit ds qui joint les deux points a pour projections respectives sur les trois axes, dx, dy, et dz; les cosinus des angles que fait la tangente avec les trois axes ont donc pour valeurs $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Dès lors, si nous écrivons que la tangente est perpendiculaire à la réaction normale N, nous avons, en vertu de la condition trouvée au n° 107 :

$$\cos\alpha \frac{dx}{ds} + \cos\beta \frac{dy}{ds} + \cos\gamma \frac{dz}{ds} = 0$$

Ou :

$$\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0 \qquad (3)$$

Nous avons en outre la relation connue entre α, β, γ :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (4)$$

Les deux équations (1), les trois équations (2), l'équation (3) et l'équation (4) nous donnent comme dans le cas précédent entre les huit variables, $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, N$, et t, sept équations qui nous permettront de déterminer le mouvement du point.

110. — Application. — Mouvement d'un point matériel pesant suspendu à un fil inextensible fixé en un point invariable (Pendule simple). — Nous supposerons la vitesse initiale nulle. Le point est abandonné librement à l'origine du temps, l'angle du fil avec la verticale ayant une valeur initiale α_0. On verrait sans peine, par un raisonnement analogue à celui des n° 95 et 104, que le point restera dans un plan vertical passant par le point o de suspension du fil et la position initiale M_0 du point. Il décrira dans ce plan une circonférence ayant pour centre le point o et pour rayon la longueur l du fil. Rapportons le mouvement du point à deux axes, l'un horizontal, l'autre vertical passant par le point o (fig. 120).

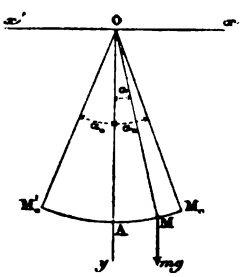

Fig. 120.

La force motrice est la pesanteur mg du point. Elle s'exerce parallèlement à l'axe des y dans le sens de o vers y; on a donc $F = mg$.

Nous savons que le théorème des forces vives est applicable dans le cas d'un point assujetti à se mouvoir sur une courbe fixe. De plus la

force motrice étant constante en grandeur et en direction, l'intégrale des forces vives existe. Nous avons donc :

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int_{t_0}^{t} mgdy = mg\,(y - y_0) \qquad (1)$$

En désignant par α l'angle que fait à l'instant t le fil o M avec oy, nous avons :

$$y = l \cos \alpha \qquad y_0 = l \cos \alpha_0$$

Nous avons d'ailleurs par hypothèse $v_0 = 0$.

L'équation (1) devient donc :

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgl\,(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

$$v^2 = 2gl\,(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

v^2 étant toujours positif, on aura nécessairement $\cos \alpha > \cos \alpha_0$. L'angle α sera nécessairement compris entre $+\alpha_0$ et $-\alpha_0$. Le point M ne pourra se mouvoir qu'entre le point M_0 et le point M'_0 symétrique de M_0 par rapport à oy.

Quand M est en M_0, on a $\alpha = \alpha_0$ et $v = 0$; M se déplaçant entre M_0 et A, α décroît constamment de α_0 à 0 ; $\cos \alpha$ augmente et atteint sa valeur maximum, qui est l'unité, pour $\alpha = 0$. La vitesse atteint donc son maximum quand le mobile est en A. Le point M se déplaçant entre A et M'_0, α varie de 0 à $-\alpha_0$; $\cos \alpha$ diminue de 1 à $\cos \alpha_0$ en repassant par les mêmes valeurs que précédemment. La vitesse s'annule de nouveau quand M vient en M'_0 ; le mobile revient alors de M'_0 en M_0 ; α augmente de $-\alpha_0$ à $+\alpha_0$; v reprend les mêmes valeurs quand le mobile repasse par les mêmes positions, et s'annule de nouveau quand il est revenu en M_0. Le mouvement recommence de même, et consiste on le voit en une série indéfinie d'oscillations du point M entre les points M_0 et M'_0

Cherchons à déterminer t en fonction de α. Nous avons :

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = 2gl\,(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

ds désignant l'arc infiniment petit parcouru par le point M pendant un temps dt. Or, on a, l'arc ds étant un arc de cercle :

$$ds = ld\alpha$$

On a donc :

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{l^2 d\alpha^2}{dt^2} = 2gl\,(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

On tire de cette équation :

$$dt^2 = \frac{l^2 d\alpha^2}{2gl\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0)} = \frac{l}{2g}\,\frac{d\alpha^2}{\cos\alpha - \cos\alpha^0}$$

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}} \qquad (1)$$

Nous mettons le signe — devant le second membre, parce que, l'angle α diminuant quand t augmente, $\frac{d\alpha}{dt}$ est négatif.

Pour intégrer l'équation (1), nous supposerons que l'angle α_0, et par suite α, est très petit. Nous pouvons poser dans ce cas (voir n° 6, note 1) :

$$\cos\alpha_0 = 1 - \frac{\alpha_0^2}{2}$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

Et l'équation (1) devient :

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{\alpha_0^2 - \alpha^2}{2}}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\;\frac{-\frac{d\alpha}{\alpha_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}} \qquad (2)$$

Nous sommes ainsi ramenés à chercher l'intégrale d'une fonction de la forme $\frac{-dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; c'est un *arc cosinus*. Nous avons donc :

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{\alpha}{\alpha_0} + t_0$$

Si nous faisons $t = 0$, nous avons $\alpha = \alpha_0$, $\mathrm{arc\,cos}\,\frac{\alpha}{\alpha_0} = 0$, et par suite $t_0 = 0$; l'équation du mouvement est donc :

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{\alpha}{\alpha_0}$$

Cherchons la durée d'une oscillation. Pour l'obtenir il faut prendre l'intégrale de l'équation (2) entre les limites α_0 et $-\alpha_0$, ce qui nous donne, en appelant T la durée d'une oscillation :

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}\,[\mathrm{arc\,cos}\,(-1) - \mathrm{arc\,cos}\,1] = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

On voit que la valeur de T est indépendante de α_0. Donc la durée de l'oscillation d'un pendule ne dépend que de sa longueur, quand l'amplitude des oscillations est suffisamment petite ; c'est sur cette propriété qu'est basé l'emploi du pendule comme régulateur en horlogerie.

CHAPITRE X

DYNAMIQUE D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

§ I. — Mouvement d'un système de points matériels. — Principe de d'Alembert.

§ II. — Mouvement des corps solides. — Théorèmes généraux. — Mouvement du centre de gravité d'un corps solide. — Mouvement d'un solide assujetti à tourner autour d'un axe — Application. Pendule composé. — Mouvement relatif. — Mouvement le plus général d'un corps solide.

§ III. — Moments d'inertie des surfaces planes. — Recherches des tensions dans un prisme fléchi par des forces transversales. — Relations entre les moments d'inertie d'une surface plane par rapport à deux axes parallèles dont l'un passe par le centre de gravité; — par rapport à plusieurs axes concourants. — Ellipse d'inertie. — Moment d'inertie de quelques surfaces. Rectangle plein et évidé. Cercle plein et évidé.

§ I. — MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

111. — Principe de d'Alembert. — Considérons un système de points matériels tous libres ou soumis à des liaisons. Sous l'influence des forces extérieures appliquées à ce système, chacun de ses points va prendre à un instant quelconque t une accélération déterminée. Appliquons en chaque point une force égale et directement opposée au produit de sa masse m par son accélération j. Cette force $-mj$ est ce que nous avons appelé la force d'inertie du point considéré. Elle va lui imprimer un déplacement égal et contraire à celui que lui impriment, en tenant compte des liaisons, les forces extérieures appliquées au système, et par suite le point considéré sera en équilibre, en tenant compte des liaisons, sous l'action simultanée de sa force d'inertie et des forces extérieures. Tous les points du système seront donc en équilibre en tenant compte des liaisons, sous l'action simultanée des forces extérieures et de leurs forces d'inertie; il en sera de même du système.

On peut donc énoncer le principe suivant, connu sous le nom de *principe de d'Alembert :*

Quand un système de points matériels se meut sous l'action de forces extérieures, il y a à chaque instant équilibre, en tenant compte des liaisons, entre ces forces extérieures et les forces d'inertie des différents points du système.

Si les liaisons rentrent dans celles définies au n° 56, la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre, est que la somme des travaux virtuels des forces directement appliquées au système soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons.

Nous appliquerons ce théorème en considérant comme forces appliquées au système, les forces extérieures et les forces d'inertie. Nous obtiendrons ainsi des relations entre ces forces, supposées connues en fonction du temps, et les accélérations des différents points du système, relations qui, jointes aux équations de liaison, nous permettront de déterminer ces accélérations en fonction du temps, et par suite de trouver le mouvement du système.

§ II. — MOUVEMENT DES CORPS SOLIDES

112. — Nous avons vu en cinématique que le mouvement élémentaire d'un corps solide pouvait toujours se décomposer en deux mouvements composants : un mouvement de translation parallèle au mouvement d'un point du solide et un mouvement de rotation autour d'un axe instantané passant par ce point.

Nous nous appuierons sur cette proposition pour étudier le mouvement que prend un corps solide sous l'action de forces connues à chaque instant. Nous décomposerons le mouvement élémentaire du solide en une translation égale et parallèle au mouvement élémentaire de son centre de gravité, et en une rotation élémentaire autour d'un axe instantané passant par ce point.

Nous serons ainsi conduits à étudier : 1° le mouvement du centre de gravité du solide ; 2° son mouvement relatif à son centre de gravité.

Pour résoudre le second problème, il nous faudrait étudier le mouvement d'un solide assujetti à tourner autour d'un point fixe,

et voir comment, connaissant les lois de ce mouvement et le mouvement d'entraînement du centre de gravité, on en déduit le mouvement relatif cherché.

Nous n'aborderons pas l'étude du mouvement d'un solide assujetti à tourner autour d'un point fixe. C'est un problème assez compliqué et d'ailleurs inutile au but que nous nous sommes fixé dans cet ouvrage ; nous nous bornerons à rappeler que le mouvement élémentaire d'un solide autour d'un point fixe, est une rotation autour d'un axe instantané passant par ce point ; nous nous contenterons d'étudier le mouvement d'un solide assujetti à tourner autour d'un axe, sans chercher à déterminer à chaque instant la position de l'axe instantané de rotation du solide autour de son centre de gravité.

113. — Théorèmes généraux. — Nous allons montrer comment on peut étendre aux corps solides les théorèmes généraux II, III, IV et V, établis pour un point matériel au § II du chapitre précédent.

Ces différents théorèmes sont évidemment applicables à un point quelconque du solide, en ajoutant aux forces extérieures appliquées en ce point, les forces de liaison ; celles-ci dans le cas d'un solide sont, nous le savons, deux à deux égales, directement opposées et appliquées en des points situés à des distances invariables les uns des autres (voir n° 56).

Nous désignerons par F la résultante des forces extérieures appliquées à un instant t à un point du solide de masse m ; par F_1 la résultante des forces de liaison appliquées au même point, au même instant ; par v la vitesse de ce point.

Ceci posé, le théorème II *des quantités de mouvement projetées sur un axe*, appliqué à un point du solide, nous donne, en désignant par F', F'_1 et v' les projections de F, F_1 et v sur le même axe.

$$F'dt + F'_1dt = dmv' \tag{1}$$

Appliquons le même théorème à tous les points du solide, et faisons la somme des résultats ainsi obtenus :

$$\Sigma\, F'_1dt + \Sigma\, F'dt = \Sigma\, dmv' = d\, \Sigma\, mv' \tag{2}$$

Les forces F_1 étant deux à deux égales et contraires, il en est de même de leurs projections F'_1 sur un même axe. On a donc :

$$\Sigma F'_1 = 0$$

Et l'équation (2) devient :

$$\Sigma F'dt = d \Sigma mv'$$

En intégrant de t_0 à t on a :

$$\int_{t_0}^{t} \Sigma F'dt = \Sigma mv' - \Sigma mv'_0 \qquad (3)$$

L'équation (3) permet d'énoncer le théorème suivant :

L'accroissement pendant un intervalle de temps quelconque de la somme des quantités de mouvement des points d'un solide en projection sur un axe, est égal à l'impulsion totale pendant le même temps de la somme des forces extérieures projetées sur le même axe ou, ce qui revient au même, *à l'impulsion totale pendant le même temps de la résultante de translation des forces extérieures projetées sur le même axe.*

Le théorème III *des moments des quantités de mouvement*, appliqué à un point du solide, nous donne :

$$d \mathcal{M}_o \; mv = \mathcal{M}_o \; Fdt + \mathcal{M}_o \; F_1dt \qquad (4)$$

Appliquons ce théorème à tous les points du solide et faisons la somme des résultats ainsi obtenus :

$$d \Sigma \mathcal{M}_o \; mv = \Sigma \mathcal{M}_o \; Fdt + \Sigma \mathcal{M}_o \; F_1dt \qquad (5)$$

les forces F_1 étant deux à deux égales et contraires, la somme de leurs moments par rapport à un axe quelconque est nulle : l'équation (5) devient ainsi :

$$d \Sigma \mathcal{M}_o \; mv = \Sigma \mathcal{M}_o \; Fdt \qquad (6)$$

En intégrant de t_0 à t on a :

$$\Sigma \mathcal{M}_o \; mv - \Sigma \mathcal{M}_o \; mv_0 = \int_{t_0}^{t} \Sigma \mathcal{M}_o \; Fdt$$

d'où le théorème suivant : *l'accroissement pendant un certain inter-*

valle de temps de la somme des moments par rapport à un axe quelconque, des quantités de mouvement des différents points d'un solide, est égal à l'intégrale pendant le même temps de la somme des moments par rapport au même axe des impulsions élémentaires des forces extérieures.

Le théorème IV *des aires* appliqué à un point du solide, nous donne, en désignant par dA l'aire décrite dans un plan perpendiculaire à un axe o par la droite joignant le pied de l'axe à la projection du point sur le plan considéré :

$$m\frac{dA}{dt} = \mathcal{M}_o\ mv \tag{7}$$

Faisons la somme des résultats ainsi obtenus pour tous les points du solide :

$$\Sigma\, m\frac{dA}{dt} = \Sigma\ \mathcal{M}_o\ mv \tag{8}$$

Le théorème des moments des quantités de mouvement nous donne d'ailleurs (voir équation (6) ci-dessus), en prenant l'axe o pour axe des moments :

$$d\ \Sigma\ \mathcal{M}_o\ mv = \Sigma\ \mathcal{M}_o\ Fdt$$

Supposons que les forces extérieures admettent une résultante unique rencontrant l'axe o. Il en est de même des forces Fdt. La somme des moments de ces forces par rapport à l'axe o est par suite nulle : on a donc :

$$\Sigma\ \mathcal{M}_o\ Fdt = d\ \Sigma\ \mathcal{M}_o\ mv = 0$$

et on en déduit, en désignant par c une constante

$$\Sigma\ \mathcal{M}_o\ mv = c$$

L'équation (8) devient ainsi :

$$\Sigma\, m\frac{dA}{dt} = c$$

Donc *lorsque les forces extérieures admettent une résultante unique rencontrant un axe fixe, si on projette à chaque instant les points du solide sur un plan perpendiculaire à cet axe, et si on mène les rayons vecteurs joignant le pied de l'axe aux points ainsi obte-*

nus, les dérivées par rapport au temps des aires décrites par ces rayons vecteurs ont une somme constante.

Le théorème V *des forces vives* appliqué à un point du corps solide nous donne :

$$mvdv = d\,\mathcal{T}\,F + d\,\mathcal{T}\,F_1 \tag{9}$$

Faisons la somme des résultats ainsi obtenus pour tous les points du solide :

$$\Sigma\, mvdv = \Sigma\, d\,\mathcal{T}\,F + \Sigma\, d\,\mathcal{T}\,F_1 \tag{10}$$

Les forces F_1 étant deux à deux égales, directement opposées et appliquées en des points dont les distances restent invariables, nous savons (voir n° 56) que la somme de leurs travaux élémentaires $\Sigma d\,\mathcal{T}\,F_1$ est nulle. L'équation (10) devient ainsi :

$$\Sigma\, mvdv = \Sigma\, d\,\mathcal{T}\,F \tag{11}$$

et en intégrant de t_0 à t :

$$\frac{1}{2}\,\Sigma\,(mv^2 - mv_0^2) = \int_{t_0}^{t} d\,\mathcal{T}\,F$$

ce qui peut s'énoncer ainsi : *la demi-somme de l'accroissement de forces vives des points d'un solide, pendant un temps quelconque, est égale au travail des forces extérieures pendant le même temps :*

Remarque. — L'équation (10) ci-dessus est applicable à un système matériel quelconque. Le théorème des forces vives est donc applicable à un système quelconque de points matériels, en ajoutant au travail des forces extérieures, le travail $\int_{t_0}^{t} \Sigma\, d\,\mathcal{T}\,F_1$ des forces de liaison, qu'on appelle aussi *forces intérieures.*

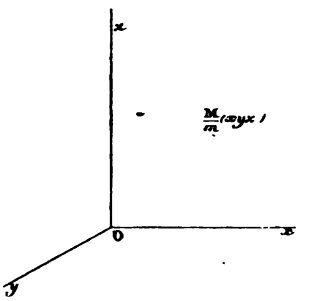

Fig. 121.

114. — Mouvement du centre de gravité d'un corps solide. — Rapportons le mouvement du solide à trois axes rectangulaires o x, o y, o z (fig. 121). Soit M un point du solide, m sa masse, x, y, z ses coordonnées. Désignons

par X, Y, Z, les sommes des projections des forces extérieures sur o x, o y, o z ; X, Y, Z, sont les composantes, parallèlement aux trois axes, de la résultante de translation des forces extérieures.

Nous savons, en vertu du principe de d'Alembert, que le solide est en équilibre sous l'action des forces extérieures et des forces d'inertie des différents points du système. Par conséquent, les sommes des projections des forces d'inertie et des forces extérieures sur les axes o x, o y, o z sont nulles (voir n° 57, conditions d'équilibre d'un corps solide).

La force d'inertie du point M est $-mj$; ses composantes suivant les trois axes sont :

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\ -m\frac{d^2y}{dt^2},\ -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

Les sommes des projections des forces d'inertie sur les trois axes ont donc pour valeurs :

$$-\Sigma\, m\frac{d^2x}{dt^2},\ -\Sigma\, m\frac{d^2y}{dt^2},\ -\Sigma\, m\frac{d^2z}{dt^2}$$

Et on a :

$$X-\Sigma\, m\frac{d^2x}{dt^2}=0 \qquad Y-\Sigma\, m\frac{d^2y}{dt^2}=0 \qquad Z-\Sigma\, m\frac{d^2z}{dt^2}=0 \tag{1}$$

Mais si on désigne par x_1, y_1, z_1, les coordonnées du centre de gravité du solide, on a (voir n° 75) :

$$x_1=\frac{\Sigma\, mx}{\Sigma\, m} \qquad y_1=\frac{\Sigma\, my}{\Sigma\, m} \qquad z_1=\frac{\Sigma\, mz}{\Sigma\, m}$$

Différentions deux fois ces équations ; nous avons en posant $\Sigma\, m = M$:

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\Sigma\, m\frac{dx}{dt}}{M},\ \frac{dy_1}{dt}=\frac{\Sigma\, m\frac{dy}{dt}}{M},\ \frac{dz_1}{dt}=\frac{\Sigma\, m\frac{dz}{dt}}{M}$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{\Sigma\, m\frac{d^2x}{dt^2}}{M},\ \frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{\Sigma\, m\frac{d^2y}{dt^2}}{M},\ \frac{d^2z_1}{dt^2}=\frac{\Sigma\, m\frac{d^2z}{dt^2}}{M} \tag{2}$$

Remplaçons dans les équations (1) :

$$\Sigma\, m\frac{d^2x}{dt^2},\ \Sigma\, m\frac{d^2y}{dt^2},\ \Sigma\, m\frac{d^2z}{dt^2}$$

par leurs expressions tirées des équations (2). Nous avons :

$$X = M\frac{d^2x_1}{dt^2},\ Y = M\frac{d^2y_1}{dt^2},\ Z = M\frac{d^2z_1}{dt^2} \tag{3}$$

Les équations (3) sont les équations du mouvement du centre de gravité x_1, y_1, z_1, du solide. Elles montrent que ce point se meut comme un point matériel libre de masse M, égale à la masse totale du solide, sous l'action d'une force égale à la résultante de translation des forces extérieures appliquée en ce point.

115. — Mouvement d'un solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe. — Prenons l'axe fixe pour des z (fig. 122). Nous savons, en vertu du principe de d'Alembert, qu'il doit y avoir équilibre entre les forces F directement appliquées au solide et les forces d'inertie. La condition d'équilibre est (voir n° 58) que la somme des moments par rapport à o z des forces appliquées au solide soit nulle. En désignant par f la force d'inertie d'un point M du solide, on doit avoir :

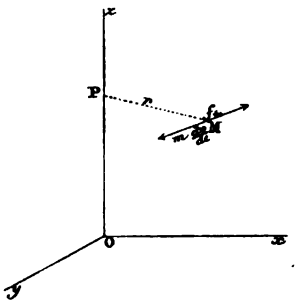

Fig. 122.

$$\Sigma\, \mathcal{M}_o\, F + \Sigma\, \mathcal{M}_o\, f = 0 \tag{1}$$

Evaluons $\Sigma\, \mathcal{M}_o\, f$. Soit ω la vitesse angulaire du solide autour de o z à l'instant t ; nous pouvons décomposer la force d'inertie f en deux composantes (voir n° 96) : 1° la force centrifuge, perpendiculaire à la trajectoire du point M. Cette force rencontre à chaque instant l'axe o z, le point M décrivant une circonférence dont le centre P est sur o z ; 2° la force d'inertie tangentielle f_t. Cette force est égale et directement opposée à la force tangentielle. Elle a donc pour grandeur la grandeur $m\frac{dv}{dt}$ de la force tangentielle, et comme elle est tangente à la circonférence décrite par le point M, son bras de levier est égal au rayon r de cette circonférence ; par suite, son moment est égal en grandeur absolue à $mr\frac{dv}{dt}$ ou à $mr^2\frac{d\omega}{dt}$, en remarquant que v est égal à ωr, et $\frac{dv}{dt}$ à $r\frac{d\omega}{dt}$. Cherchons le signe de ce moment. Nous supposons que

nous prenons pour sens des moments positifs le sens du mouvement. Si les forces extérieures tendent à faire tourner le solide dans le sens du mouvement, elles ont pour effet d'augmenter la vitesse angulaire ω ; $\frac{d\omega}{dt}$ est donc positif ; d'ailleurs les forces d'inertie, opposées aux forces extérieures, tendent à faire tourner leurs points d'application en sens contraire du mouvement, c'est-à-dire dans le sens des moments négatifs. Donc quand $\frac{d\omega}{dt}$ est positif, $\mathcal{M}_o\ f_t$ est négatif. On verrait de même que si les forces extérieures agissent en sens contraire du mouvement, ω décroît, $\frac{d\omega}{dt}$ est négatif, les forces f_t sont dirigées dans le sens du mouvement, $\mathcal{M}_o\ f_t$ est positif. Donc quand $\frac{d\omega}{dt}$ est négatif, $\mathcal{M}_o\ f_t$ est positif. $\mathcal{M}_o\ f_t$ est donc de signe contraire à $\frac{d\omega}{dt}$ et par suite, mr^2 étant évidemment toujours positif, on a :

$$\mathcal{M}_o\ f_t = -\ mr^2 \frac{d\omega}{dt}$$

On en déduit :

$$\Sigma\ \mathcal{M}_o\ f_t = -\frac{d\omega}{dt}\ \Sigma\ mr^2$$

D'ailleurs, la force centrifuge rencontrant constamment l'axe o z, son moment par rapport à cet axe est constamment nul ; le moment de la force d'inertie f est donc égal à celui de la force d'inertie tangentielle f_t, et l'on a :

$$\Sigma\ \mathcal{M}_o\ f = \Sigma\ \mathcal{M}_o\ f_t = -\ \Sigma\ mr^2 \frac{d\omega}{dt}$$

Et comme $\frac{d\omega}{dt}$ a la même valeur pour tous les points du solide :

$$\Sigma\ \mathcal{M}_o\ f_t = -\frac{d\omega}{dt}\ \Sigma\ mr^2 \qquad (2)$$

L'équation (1) devient ainsi :

$$\Sigma\ \mathcal{M}_o\ F - \frac{d\omega}{dt}\ \Sigma\ mr^2 = 0$$

De là on tire ;

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma\ \mathcal{M}_o\ F}{\Sigma\ mr^2} \qquad (3)$$

Désignons par α l'angle d'un plan invariablement lié au solide

avec le plan fixe z o x, cet angle étant compté positivement dans le sens du mouvement. Pendant le temps dt, tous les points du solide tournent d'un même angle $d\alpha$ autour de o z, la vitesse angulaire ω est égale à $\frac{d\alpha}{dt}$, et sa dérivée $\frac{d\omega}{dt}$, à $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$. L'équation (3) peut donc s'écrire :

$$\frac{d^2\alpha}{dt} = \frac{\Sigma \mathcal{M}_o F}{\Sigma mr^2} \tag{4}$$

$\Sigma \mathcal{M}_o F$ étant connu en fonction de t, l'équation (4) nous donne, entre t et l'angle α, une relation qui détermine la position du solide. C'est l'équation du mouvement.

La quantité Σmr^2 ne dépend que des dimensions du solide et de la position de l'axe o z. On l'appelle *moment d'inertie du solide par rapport à l'axe* o z. C'est la somme des moments, par rapport à cet axe, des forces d'inertie du solide, divisée par la dérivée $\frac{d\omega}{dt}$ de la vitesse angulaire. En désignant par I ce moment d'inertie, nous pouvons écrire :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{\Sigma \mathcal{M}_o F}{I} \tag{5}$$

Nous avons vu plus haut que la force d'inertie tangentielle f_t en un point du solide avait pour valeur $-mr\frac{d\omega}{dt}$. En remplaçant $\frac{d\omega}{dt}$ par son expression (5), on a :

$$f_t = -mr\frac{d\omega}{dt} = -mr\frac{\Sigma \mathcal{M}_o F}{I} \tag{6}$$

Cette force f_t est la composante perpendiculaire à l'axe de rotation de la force qu'il faudrait appliquer en chaque point du solide pour le maintenir en équilibre.

On appelle *rayon de gyration* R du solide par rapport à o z la racine carrée du quotient de son moment d'inertie I par rapport au même axe, divisé par la masse totale M du solide :

$$R^2 = \frac{I}{M} = \frac{\Sigma mr^2}{M}$$

116. — Application. — Pendule composé. — On appelle pendule composé un corps qui se meut autour d'un axe horizontal fixe sous l'action de la pesanteur. Soit o z l'axe fixe (fig. 123), G le centre de gravité

du corps; abaissons de G une perpendiculaire Go sur oz. Nous prendrons pour axe des y la verticale du point o. L'axe ox sera perpendiculaire à zoy.

Désignons par α l'angle Gox. Nous avons, en appliquant l'équation (4) du n° précédent :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{\Sigma\, \mathcal{M}_o\, F}{\Sigma m r^2} \qquad (1)$$

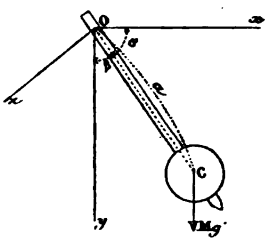

Fig. 123.

Les forces extérieures F sont les poids mg des différents points du solide. Ces poids se composent en une résultante unique qui est le poids Mg du solide, appliqué au centre de gravité G, M désignant la masse totale du solide. La somme des moments des forces mg est égale au moment de leur résultante Mg, moment qui a pour expression a désignant la longueur oG :

$$\Sigma\, \mathcal{M}_o\, F = \mathcal{M}_o\, Mg = Mga \cos \alpha$$

et l'équation (1) devient :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{Mga \cos \alpha}{\Sigma\, mr^2} = \frac{Mga \cos \alpha}{M R^2} = \frac{ga \cos \alpha}{R^2}$$

R désignant le rayon de gyration du pendule relativement à l'axe oz. On déduit de cette équation, en en multipliant les deux membres par $2\, d\alpha$:

$$2d\,\alpha \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{2ga}{R^2} \cos \alpha\, d\,\alpha$$

$2\, d\alpha\, \frac{d^2\alpha}{dt^2}$, c'est la différentielle de $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$. On a donc, en intégrant entre les limites t_0 et t :

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\alpha_0}{dt}\right)^2 = \frac{2ga}{R^2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \cos \alpha\, d\,\alpha = \frac{2ga}{R^2} (\sin \alpha - \sin \alpha_0)$$

ou, en supposant que la vitesse initiale $\frac{d\alpha_0}{dt}$ est nulle :

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{2ga}{R^2} (\sin \alpha - \sin \alpha_0)$$

et :

$$dt = \sqrt{\frac{R^2}{2ga}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin \alpha - \sin \alpha_0}} \qquad (2$$

Si nous désignons par β l'angle Goy, nous avons :

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad d\beta = -d\alpha \qquad \sin\alpha = \cos\beta \qquad \sin\alpha_0 = \cos\beta_0$$

et l'expression (2) de dt devient :

$$dt = -\sqrt{\frac{R^2}{2ag}}\,\frac{d\beta}{\sqrt{\cos\beta - \cos\beta_0}} \tag{3}$$

Cette équation (3) comparée à l'équation (1) du n° 110 nous montre que le pendule composé se meut comme un pendule simple de longueur $\frac{R^2}{a}$ abandonné à l'action de la pesanteur sous l'angle initial β_0. Si β_0 est très petit, on sait que les oscillations sont isochrones et que leur durée a pour valeur :

$$T = \pi\sqrt{\frac{R^2}{ag}}$$

117. — Du mouvement relatif. — Proposons-nous d'abord de déterminer le mouvement relatif d'un point matériel de masse m, connaissant les forces extérieures appliquées en ce point et le mouvement d'entraînement du système de comparaison. Nous avons vu en cinématique (voir n° 22) que l'accélération j_r dans le mouvement relatif est la résultante géométrique de l'accélération absolue j, de l'accélération $-j_e$ égale et contraire à l'accélération du mouvement d'entraînement, et de l'accélération centrifuge composée, $-j_c$. Si nous considérons des forces mj_r, mj, $-mj_e$, $-mj_c$, ayant respectivement mêmes directions que les accélérations correspondantes, la force mj_r sera, en vertu de ce que nous venons de rappeler, la résultante géométrique des trois autres. Cette force mj_r, appliquée au point matériel considéré, lui communiquera le mouvement relatif cherché, puisque l'accélération j_r qu'elle lui communiquera, sera identique à l'accélération du point dans son mouvement relatif.

La force mj, c'est la résultante des forces directement appliquées au point. La force $-mj_e$ est égale et contraire à la force mj_e qui, appliquée au point, lui communique son mouvement d'entraînement. C'est *la force d'inertie du mouvement d'entraînement*. La force $-mj_c$ s'appelle *la force centrifuge composée*.

La force mj_r étant, ainsi que nous l'avons dit, la résultante des

trois autres, on voit que *le mouvement relatif du point matériel considéré, pourra être considéré comme un mouvement absolu, si on applique à ce point, en outre des forces extérieures, la force d'inertie du mouvement d'entraînement et la force centrifuge composée.*

Nous avons vu au n° 22 comment on détermine la grandeur et la direction de l'accélération centrifuge composée $-j_c$. Nous ne reviendrons pas sur ce point. Nous rappellerons seulement que cette accélération s'annule quand le mouvement élémentaire d'entraînement est une translation. Il en est évidemment de même de la force centrifuge composée.

On donne le nom *de forces apparentes* aux forces $-mj_e$ et $-mj_c$.

Voyons maintenant comment on déterminera le mouvement relatif d'un corps solide, connaissant les forces extérieures F qui lui sont appliquées et le mouvement d'entraînement du système de comparaison.

Démontrons d'abord que deux systèmes de forces équivalents communiquent à un solide des mouvements identiques. En effet, en vertu du principe de d'Alembert, on déterminera le mouvement du solide en écrivant que le système des forces d'inertie de ses différents points fait équilibre au système des forces extérieures. Si on applique au solide deux systèmes équivalents de forces extérieures, ces deux systèmes (voir n° 61) feront équilibre au même système de forces d'inertie, et donneront par suite les mêmes équations pour déterminer le mouvement du solide.

Ceci posé, désignons par j_r l'accélération que prend, dans le mouvement relatif cherché, considéré comme absolu, un point quelconque de masse m, appartenant au solide. Il résulte évidemment du principe de d'Alembert que si, en chaque point du solide, nous appliquons une force égale à mj_r, le système $S\,(mj_r)$ de ces forces communiquera au solide le mouvement relatif cherché, considéré comme absolu, car ce système est évidemment en équilibre avec le système $S\,(-mj_r)$ des forces d'inertie du mouvement relatif, forces respectivement égales et contraires aux forces mj_r.

Désignons d'ailleurs par j l'accélération que prend un point quelconque du solide dans le mouvement absolu résultant de

l'action des forces extérieures F sur le solide, par j_e l'accélération de ce point dans le mouvement d'entraînement que prend le solide supposé invariablement relié au système de comparaison, par $-j_c$ son accélération centrifuge composée.

Il résulte de ce que nous venons d'établir en étudiant le mouvement relatif d'un point matériel, que le système $S\,(mj_r)$ est équivalent à la réunion des trois systèmes $S\,(-mj)$, $S\,(-mj_e)$, $S\,(-mj_c)$, respectivement formés par l'ensemble des forces mj, des forces d'inertie d'entraînement $-mj_e$ et des forces centrifuges composées $-mj_c$, pour tous les points du solide. En effet, une force quelconque mj_r du premier système étant la résultante géométrique des trois forces mj, $-mj_e$, $-mj_c$, qui lui correspondent respectivement dans chacun des autres systèmes, et les quatre forces ayant même point d'application, les forces du premier système ont même projection sur un axe quelconque et même moment par rapport à un axe quelconque, que les forces des trois autres systèmes réunis.

Donc, puisque le système des forces mj_r communique au solide le mouvement relatif cherché, considéré comme absolu, et puisque d'autre part, le système $S\,(mj_r)$ est équivalent à la réunion des trois systèmes $S\,(mj)$, $S\,(-mj_e)$, $S\,(-mj_c)$, il suffit, en vertu de ce que nous avons établi en commençant, pour communiquer au solide le mouvement relatif cherché, considéré comme un mouvement absolu, de lui appliquer simultanément les trois systèmes de forces $S\,(mj)$, $S\,(-mj_e)$, $S\,(-mj_c)$.

Le système $S\,(mj)$ est d'ailleurs équivalent au système des forces extérieures $S\,(F)$. Ce dernier système fait en effet équilibre en vertu du principe de d'Alembert au système $S\,(-mj)$ des forces d'inertie des différents points du solide dans le mouvement absolu que prend celui-ci sous l'action des forces extérieures F; le système $S\,(mj)$ fait évidemment équilibre de son côté au système $S\,(-mj)$. Les deux systèmes $S\,(F)$, $S\,(mj)$, qui font équilibre à un troisième sont donc équivalents.

Donc, en résumé, pour communiquer au solide le mouvement relatif cherché, il suffit de lui appliquer le système $S\,(mj_r)$, ou, ce qui revient au même, la réunion équivalente des trois systèmes $S\,(mj)$, $S\,(-mj_e)$, $S\,(-mj_e)$, ou enfin, ce qui donne toujours le

même mouvement, la réunion équivalente des systèmes S (F), S ($-mj_e$), S ($-mj_e$). On peut donc énoncer la proposition suivante :

Le mouvement relatif d'un corps solide est identique au mouvement absolu qu'il prend quand on ajoute, à chaque instant, aux forces extérieures, le système des forces apparentes pour tous les points du solide.

118. — Mouvement le plus général d'un corps solide. — Nous savons (voir cinématique n° 18) que le mouvement élémentaire d'un solide pourra toujours être décomposé en deux mouvements composants, savoir :

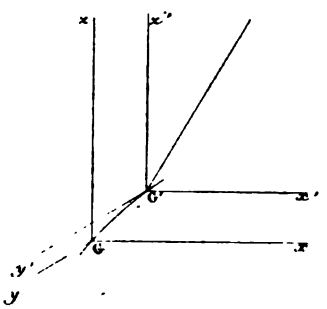

Fig. 124.

1° Translation élémentaire égale et parallèle au déplacement élémentaire d'un de ses points ; si nous prenons ce point au centre de gravité G du solide, nous savons (voir n° 114) déterminer directement son mouvement élémentaire G G', connaissant à chaque instant les forces extérieures appliquées au solide ;

2° Rotation élémentaire autour d'un axe instantané passant par le centre de gravité. Nous rapporterons ce mouvement à trois axes de direction constante, Gx, Gy, Gz, passant par le centre de gravité (fig. 124). Ces trois axes constituent un système de comparaison, dont le mouvement élémentaire d'entraînement est une translation parallèle au mouvement élémentaire GG' du centre de gravité.

Le mouvement du solide relativement à ce système de comparaison se déterminera en ajoutant aux forces extérieures, les forces apparentes des différents points du solide ; or, la force centrifuge composée est nulle pour tous les points du solide, le mouvement élémentaire d'entraînement de chaque point étant une translation. Quant aux forces d'inertie d'entraînement $-mj_e$, elles sont toutes parallèles, car l'accélération j_e est égale et parallèle pour tous les points, le mouvement d'entraînement étant une translation. Elles sont de plus proportionnelles aux masses des

différents points du solide auquel elles sont appliquées. Elles se composent donc en une résultante unique — Mj_0 passant par le centre de gravité G′, résultante qui sera évidemment sans influence sur le mouvement du solide assujetti à tourner autour du point G′ considéré comme fixe. Les forces apparentes sont donc, dans le cas actuel, sans effet sur le mouvement du solide autour de son centre de gravité ; le mouvement aura lieu par suite comme si le solide était assujetti à se mouvoir autour de son centre de gravité sous la seule action des forces extérieures.

Pour traiter complètement la question du mouvement d'un solide, il ne nous resterait donc plus qu'à étudier le mouvement d'un solide assujetti à tourner autour d'un point fixe sous l'action de forces connues. Nous avons déjà dit pour quelle raison nous n'abordons pas ce problème.

§ III. — MOMENTS D'INERTIE DES SURFACES PLANES

119. — Recherche des tensions dans un prisme fléchi par des forces transversales. — Moments d'inertie d'une surface plane. — Un des problèmes les plus importants de la résistance des matériaux consiste dans la recherche des actions moléculaires qui s'exercent aux différents points d'un prisme homogène en équilibre sous l'action de forces transversales. C'est le problème de la résistance des poutres droites soumises à des forces transversales.

Soit ABCD un prisme que nous supposerons symétrique par rapport au plan de la figure, ce dernier étant supposé lui-même parallèle aux arêtes (fig. 125). Nous admettrons que les forces extérieures appliquées au prisme sont parallèles au plan de la figure, symétriques par rapport à ce plan et perpendiculaires à l'axe du prisme.

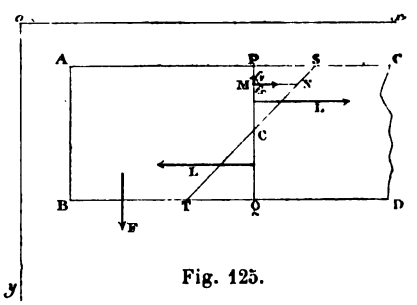

Fig. 125.

Soit f la résultante des forces intérieures exercées sur un élément superficiel infiniment petit, ω, d'une section droite PQ du prisme ;

soit M la position de cet élément ω. Le prisme étant en équilibre, la partie ABPQ de ce prisme peut être considérée comme étant en équilibre sous l'action, 1° des forces extérieures F appliquées entre l'extrémité A B et la section P Q ; 2° des forces f exercées sur les différents éléments tels que ω de la section P Q par la partie P Q C D du prisme.

Rapportons le prisme et les forces à deux axes rectangulaires situés dans le plan de la figure, l'un ox parallèle aux arêtes du prisme, l'autre oy parallèle aux forces F. Décomposons chaque force f en deux composantes, f_x et f_y, respectivement parallèles à ox et oy. Les forces f, F se faisant équilibre, les sommes de leurs projections sur ox et sur oy sont nulles.

Projetons-les sur oy. Nous avons, en remarquant que les forces F se projettent en vraie grandeur sur cet axe :

$$\Sigma f_y + \Sigma F = 0 \qquad (1)$$

Cette égalité nous montre que les forces f_y ont une résultante égale à la somme ΣF des forces extérieures appliquées entre l'extrémité du prisme et la section considérée. Cette somme se nomme *l'effort tranchant* exercé dans la section P Q. Cet effort tend à séparer le prisme en deux parties suivant P Q. Les forces f_y font équilibre à cet effort tranchant.

Si nous projetons les forces f et F sur ox, nous avons, en remarquant que les projections des forces F sont nulles :

$$\Sigma f_x = 0 \qquad (2)$$

Les forces parallèles f_x, dont la somme est nulle, se réduisent par suite à un couple. En d'autres termes, si nous composons en une résultante unique L les forces f_x qui sont dirigées dans le sens positif, de o vers x, et de même en une résultante unique L' les forces f_x dirigées en sens contraire, L' est égal à $-L$.

Pour trouver le moment du couple $(L, -L)$ écrivons que la somme des moments des forces F et f est nulle pour un axe quelconque situé dans le plan P Q perpendiculairement au plan de la figure. Les moments des forces f_y sont tous nuls, ces forces étant situées dans le plan de l'axe des moments ; la somme des

moments des forces F est donc égale et de signe contraire à la somme des moments des forces f_x, c'est-à-dire au moment du couple $(L, -L)$.

$$\Sigma \mathcal{M}_o f_x = -\Sigma \mathcal{M}_o F \tag{3}$$

Cette équation (3) nous montre que les forces f_x sont grandes devant les forces f_y. En effet, la somme des moments des forces f_x, c'est-à-dire le moment du couple $(L, -L)$, a pour valeur le produit de la force L par le bras de levier du couple, dont la longueur est comparable aux dimensions de la section transversale P Q du prisme. La somme, $\Sigma \mathcal{M}_o F$, des moments des forces F peut être représentée par le produit d'une force ΣF, égale à la somme des forces extérieures, multipliée par un bras de levier dont la longueur sera comparable aux dimensions longitudinales du prisme. Celles-ci étant généralement grandes devant les dimensions transversales, et les deux moments étant égaux en grandeur absolue, la force L est grande devant la force ΣF. Les forces f_x ayant L et $-L$ pour résultantes sont donc grandes devant les forces f_y ayant ΣF pour résultante.

Proposons-nous de déterminer en chaque point la valeur de la composante f_x, qui, d'après ce que nous venons de remarquer, différera peu de f.

Nous avons dit que ces forces f_x sont, les unes dirigées dans le sens ox et ont L pour résultante, les autres dirigées en sens contraire et ont $-L$ pour résultante. Nous connaissons le moment du couple $(L, -L)$ qui est égal à $\Sigma \mathcal{M}_o F$.

Pour connaître la composante f_x en un point quelconque M, il nous faut en outre savoir comment sont réparties les forces f_x aux différents points de la section P Q. Nous admettrons que cette répartition est conforme à la loi suivante, résultant de ce qu'on appelle en général l'*hypothèse du plan :*

Par chaque point M, menons perpendiculairement à P Q une longueur M N égale à la pression par unité de surface en M, $\frac{f_x}{\omega}$. Nous admettrons que le lieu géométrique des points N est un plan.

Ce plan, par raison de symétrie, sera évidemment perpendiculaire au plan de la figure. Soit S T sa trace sur ce plan, C le point

d'intersection de ST et de PQ. Désignons par r la distance MC; la longueur MN est proportionnelle à r; on a donc, en désignant par k un facteur constant :

$$MN = \frac{f_x}{\omega} = kr$$

D'où :

$$f_x = k\,\omega\,r \tag{4}$$

et par suite :

$$\Sigma f_x = \Sigma\, k\,\omega\,r = k\,\Sigma\,\omega\,r$$

Si nous désignons par y l'ordonnée de M, par y_1 l'ordonnée de C, r est égal à $y_1 - y$. On a donc, en remarquant que Σf_x est nul à cause de l'équation (2) :

$$\Sigma\,\omega\,r = \Sigma\omega\,(y_1 - y) = \Sigma\omega y_1 - \Sigma\omega y = y_1\,\Sigma\,\omega - \Sigma\omega y = 0$$

D'où :

$$y_1 = \frac{\Sigma\,\omega\,y}{\Sigma\,\omega}$$

ce qui nous montre que le point C est le centre de gravité de la section PQ (voir n° 80).

Évaluons maintenant le moment de la force f_x par rapport à un axe perpendiculaire en C au plan de la figure, les moments étant comptés positivement dans le sens indiqué par la flèche :

$$\mathcal{M}_o\, f_x = -f_x \times r = -k\,\omega\,r \times r = -k\,\omega\,r^2$$

Et par suite, à cause de l'équation (3) :

$$\Sigma\,\mathcal{M}_o\, f_x = -k\,\Sigma\,\omega\,r^2 = -\Sigma\,\mathcal{M}_o\, F \tag{5}$$

L'égalité (5) donne :

$$k = \frac{\Sigma\,\mathcal{M}_o\, F}{\Sigma\,\omega\,r^2}$$

et l'égalité (4) nous donne la valeur de $\frac{f_x}{\omega}$.

$$\frac{f_x}{\omega} = kr = \frac{r\,\Sigma\,\mathcal{M}_o\, F}{\Sigma\,\omega\,r^2} \tag{6}$$

$\Sigma\,\mathcal{M}_o\, F$ est ce qu'on appelle le *moment fléchissant* dans la section PQ.

$\Sigma \omega r^2$ est le *moment d'inertie* de la section PQ par rapport à l'axe C.

Si on pose :

$$\Sigma \mathcal{M}_0 F = X \quad , \quad \Sigma \omega r^2 = I$$

l'équation (6) devient :

$$\frac{f_x}{\omega} = \frac{rX}{I}$$

Si nous nous proposons de ne pas dépasser pour la pression par unité de surface $\frac{f_x}{\omega}$ une limite supérieure R, déterminée par l'expérience suivant la matière dont est formé le prisme, nous devons avoir :

$$R \geqslant \frac{f_x}{\omega} \text{ ou } R \geqslant \frac{rX}{I}$$

D'où :

$$X \leqslant \frac{IR}{r}$$

$\frac{IR}{r}$ est ce qu'on appelle le *moment résistant* de la section PQ ; il est d'autant plus fort, toutes choses égales d'ailleurs, que le moment d'inertie I de la section est plus élevé.

Les considérations qui précèdent permettent de juger de l'intérêt que présente, pour l'étude de la résistance des matériaux, la détermination des moments d'inertie des surfaces planes.

120. — Rayon de gyration. — On voit que le moment d'inertie d'une surface plane est identique au moment d'inertie $\Sigma m r^2$ d'un prisme homogène infiniment mince, dont chaque élément superficiel ω aurait pour masse m la valeur de ω.

Si nous désignons par R le rayon de gyration, nous savons que l'on a (voir n° 115) :

$$MR^2 = \Sigma mr^2$$

Les masses M et m sont dans le même rapport que ω et Ω, Ω désignant l'aire de la surface considérée. On aura donc pour déterminer la valeur du rayon de gyration R, l'expression :

$$R = \sqrt{\frac{\Sigma \omega r^2}{\Omega}} = \sqrt{\frac{I}{\Omega}}$$

121. — Détermination analytique des moments d'inertie des surfaces planes. — Nous remarquerons d'abord que quand une surface S_1 est formée par la somme ou la différence de deux surfaces S_2 et S_3, le moment d'inertie de S_1 est égal à la somme ou à la différence des moments d'inertie de S_2 et de S_3. En effet, la somme des éléments ωr^2 pour tous les éléments ω de S_1 peut évidemment s'opérer en faisant la somme des éléments ωr^2 relatifs à la surface S_2, et en y ajoutant ou en en retranchant la somme des mêmes éléments ωr^2 relatifs à la surface S_3.

Ceci posé, soit AB une surface plane dont nous nous proposons de déterminer le moment d'inertie par rapport à un axe ox situé dans son plan (fig. 126). Soit $f(x, y) = 0$, l'équation de la courbe qui limite la surface AB, rapportée à deux axes rectangulaires, l'axe d'inertie étant pris pour axe des x. Divisons la surface AB en éléments infiniment petits ω par des parallèles aux axes, équidistantes et infiniment rapprochées. Soient dx, dy les distances respectives de ces parallèles aux axes. Les éléments ω sont tous des rectangles infiniment petits, dont la surface a pour expression le produit $dx\,dy$. L'élément du moment d'inertie cherché, correspondant à un élément ω situé au point M, dont les coordonnées sont x et y, a pour expression ωy^2, c'est-à-dire $y^2\,dx\,dy$. Le moment d'inertie cherché est égal à la somme de ces éléments $y^2\,dx\,dy$, pour tous les éléments $\omega = dx\,dy$ de la surface AB.

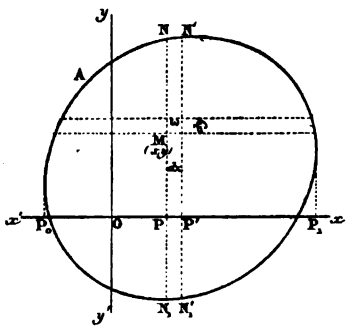

Fig. 126.

Pour effectuer cette sommation, commençons par faire la somme des éléments $y^2\,dx\,dy$ qui correspondent aux éléments $dx\,dy$ de la surface A B, compris entre les parallèles à oy infiniment voisines NN_1, $N'N'_1$; pour tous ces éléments, dx a la même valeur PP' ; il peut donc être mis en facteur dans leur somme : celle-ci est par suite égale au produit de dx par la somme des valeurs que prend $y^2\,dy$, quand le point M se déplace à l'intérieur de la surface entre ses positions extrêmes N et N_1, son abscisse x restant constante et égale à oP. Cette dernière somme est l'inté-

grale $\int y^2\, dy$ prise entre les limites $-PN_1$ et PN. Ces limites sont des fonctions de x obtenues en résolvant par rapport à y l'équation de la courbe $f(x, y) = 0$. Nous avons vu (Ire partie, n° 80) que l'intégrale définie $\int_{-PN_1}^{+PN} y^2\, dy$ est une fonction de ses limites. Celles-ci étant des fonctions de x, nous pouvons poser :

$$\int_{-PN_1}^{+PN} y^2\, dy = \varphi(x)$$

Le produit $\varphi(x)\, dx$ de cette intégrale par dx représente donc la somme des éléments $y^2\, dx\, dy$, pour tous les éléments superficiels du rectangle $NN_1N'N'_1$; en d'autres termes, c'est le moment d'inertie de ce rectangle. La surface AB est la somme des rectangles tels que $NN_1N'N'_1$, correspondant à toutes les valeurs de x comprises entre $-oP_0$ et $+oP_1$. Donc, en vertu de ce que nous avons dit en commençant, pour avoir le moment d'inertie de AB il faut faire la somme des moments d'inertie de tous ces rectangles tels que $NN_1N'N'_1$, c'est-à-dire faire la somme des produits $\varphi(x)\, dx$ pour toutes les valeurs de x comprises entre $-oP_0$ et $+oP_1$. Le moment d'inertie cherché I de AB, a donc pour expression :

$$I = \int_{-OP_0}^{OP_1} dx\, \varphi(x) = \int_{-OP_0}^{+OP_1} dx \int_{-PN_1}^{+PN} y^2 dy = \int_{-OP_0}^{OP_1} \int_{-PN_1}^{PN} y^2 dx dy$$

Ce que nous exprimerons en disant que le moment d'inertie cherché est égal à l'intégrale double $\int\int y^2\, dx\, dy$, pour tous les points situés à l'intérieur de la surface donnée.

122. — Relations entre les moments d'inertie d'une surface par rapport à deux axes parallèles, dont l'un passe par le centre de gravité de la surface. — Soient xx', $x_1x'_1$ deux axes parallèles, dont l'un xx' passe par le centre de gravité G de la surface AB (fig. 127). Soient I, I_1 les moments d'inertie de cette surface par rapport aux axes xx', $x_1x'_1$. Soit M un point de la surface ; ω un élément de la surface AB situé en ce point, x, y les coor-

données du point M rapporté aux deux axes rectangulaires Gx, Gy. Abaissons MP perpendiculaire sur xx'; MP rencontre en P_1 l'axe $x_1 x'_1$. Désignons par a la longueur constante PP_1. Nous avons :

$$I_1 = \Sigma\, \omega\, \overline{MP_1}^2 = \Sigma\, \omega\, \overline{(MP - PP_1)}^2 = \Sigma\, \omega\, (y - a)^2 = \Sigma\, \omega\, (y^2 + a^2 - 2ay)$$

ou :

$$I_1 = \Sigma\, \omega\, y^2 + \Sigma\, \omega\, a^2 - \Sigma\, 2a\, \omega\, y = I + a^2\, \Sigma\, \omega - 2a\, \Sigma\, \omega\, y$$

$\Sigma\omega$, c'est la surface AB. Désignons-la par Ω. Nous savons d'ailleurs (voir n° 80) que $\Sigma\omega y$ est égal à l'ordonnée du centre de gravité G de la surface AB multipliée par Ω. Ce centre de gravité étant sur l'axe xx', son ordonnée est nulle. On a donc $\Sigma\omega y = 0$, et par suite l'équation (1) devient :

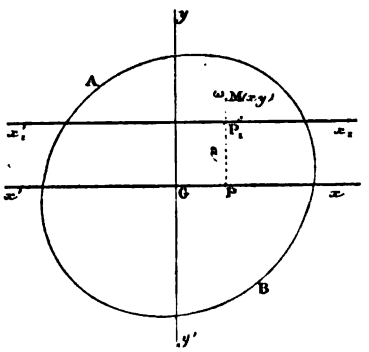

Fig. 127.

$$I_1 = I + a^2\, \Omega \qquad (2)$$

Désignons par R, R_1 les rayons de gyration de la surface AB, relatifs aux axes xx', $x_1 x'_1$, nous avons (voir n° 120) :

$$\Omega R^2 = I \qquad \Omega R_1^2 = I_1$$

La relation (2) nous donne :

$$R_1^2 = R^2 + a^2 \qquad (3)$$

L'équation (2) fait connaître I_1, en fonction de I et de a.

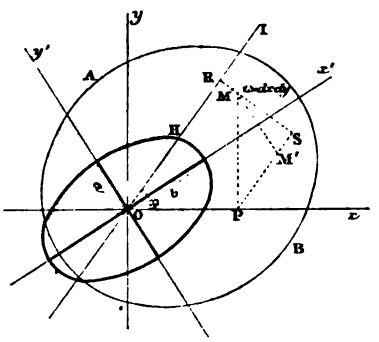

Fig. 128.

123. — Relation entre les moments d'inertie d'une surface par rapport à différents axes passant par le même point. — Soit AB une surface plane, oI un axe d'inertie situé dans son plan (fig. 128). Cherchons comment varie le moment d'inertie I de la surface AB par rapport à l'axe oI quand celui-ci tourne autour du point o. Soit M un point quelconque à l'inté-

rieur de AB ; x, y, ses coordonnées oP, MP, par rapport à deux axes rectangulaires passant par le point o. Partageons la surface AB en éléments infiniment petits $\omega = dxdy$ par des parallèles aux axes équidistantes et infiniment rapprochées. Abaissons du point M une perpendiculaire MR sur oI. Désignons par r la longueur MR. Nous avons :

$$I = \Sigma\, \omega\, r^2 = \int\int r^2\, dxdy$$

l'intégrale double étant prise pour tous les points de la surface. Évaluons r^2 en fonction de x et de y. A cet effet, abaissons PS perpendiculaire sur MR et désignons par α l'angle Iox. Nous avons :

$$r = \mathrm{MR} = \mathrm{RS} - \mathrm{MS} = \mathrm{oP}\, \sin\alpha - \mathrm{MP}\, \cos\alpha = x \sin\alpha - y \cos\alpha$$

et :

$$r^2 = x^2 \sin^2\alpha + y^2 \cos^2\alpha - 2xy \sin\alpha \cos\alpha$$

d'où :

$$r^2\, dxdy = \sin^2\alpha\, x^2\, dxdy + \cos^2\alpha\, y^2\, dxdy - 2 \sin\alpha \cos\alpha\, xy\, dxdy$$

et, en faisant la somme de ces éléments pour tous les éléments $dxdy$ de la surface donnée :

$$I = \int\int r^2\, dxdy = \sin^2\alpha \int\int x^2\, dxdy + \cos^2\alpha \int\int y^2\, dxdy$$
$$- 2 \sin\alpha \cos\alpha \int\int xy\, dxdy$$

ces quatre intégrales doubles étant prises pour tous les points situés à l'intérieur de la surface. Les trois intégrales qui figurent au second membre ne dépendent évidemment que de la surface et de la position des axes et sont indépendantes de α. Posons :

$$A = \int\int y^2\, dxdy \quad B = \int\int x^2\, dxdy \quad C = \int\int xy\, dxdy$$

A est le moment d'inertie de la surface par rapport à ox, B son moment d'inertie par rapport à oy. Nous avons :

$$I = A \cos^2\alpha + B \sin^2\alpha - 2C \sin\alpha \cos\alpha \qquad (1)$$

La relation (1) répond à la question.

On peut figurer par une courbe la variation de I en fonction

de α, en portant sur oI une longueur $oH = \frac{D}{\sqrt{I}}$, D désignant une constante. Soient x_1, y_1 les coordonnées du point H. Nous avons :

$$x_1 = oH \cos\alpha = \frac{D}{\sqrt{I}} \cos\alpha \qquad y_1 = oH \sin\alpha = \frac{D}{\sqrt{I}} \sin\alpha$$

d'où :

$$\cos\alpha = x_1 \frac{\sqrt{I}}{D} \quad \sin\alpha = y_1 \frac{\sqrt{I}}{D} \tag{2}$$

Remplaçons dans l'équation (1) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ par leurs expressions (2). Nous avons :

$$D^2 I = AIx_1^2 + BIy_1^2 - 2CIx_1y_1$$

ou :

$$D^2 = Ax_1^2 + By_1^2 - 2Cx_1y_1 \tag{3}$$

équation d'une ellipse ayant son centre à l'origine. Cette ellipse, qui est le lieu géométrique du point H quand l'angle α varie, s'appelle *ellipse d'inertie* relative au point considéré ; si nous faisons tourner les axes ox, oy de façon à les faire coïncider avec les axes de l'ellipse d'inertie, le terme en xy disparaît de l'équation de l'ellipse (voir 2e partie, nos 15 et 20). On a par suite $C = 0$. La condition pour que les axes de coordonnées coïncident avec les axes de l'ellipse d'inertie est donc :

$$C = \int\int xy\, dxdy = 0$$

Les axes de l'ellipse d'inertie s'appellent *axes principaux d'inertie* relatifs au point o. Les moments d'inertie relatifs à ces axes ont des valeurs maxima et minima, la longueur oH d'un rayon de l'ellipse étant égale à $\frac{D}{\sqrt{I}}$, et oH étant minimum ou maximum quand le point H coïncide avec l'extrémité d'un des axes de l'ellipse d'inertie.

Si le point o est le centre de gravité de la surface, l'ellipse d'inertie relative à ce point est dite *ellipse centrale d'inertie*.

On voit qu'il suffira de connaître cette ellipse pour déterminer le moment d'inertie de la surface par rapport à un axe quelconque passant par son centre de gravité. On passera de là au moment d'inertie par rapport à un axe quelconque situé dans le plan de la surface, en faisant usage de la relation (2) du n° précédent.

Remarque I. — L'équation de l'ellipse d'inertie rapportée à ses axes est, en désignant par A, B les moments d'inertie de la surface par rapport aux axes principaux d'inertie du point o

$$Ax'^2 + By'^2 = D^2$$

Désignons par a, b les rayons de gyration relatifs aux axes principaux d'inertie. On a :

$$\Omega\, a^2 = A \qquad \Omega\, b^2 = B$$

Ω désignant l'aire de la surface donnée. L'équation ci-dessus peut donc s'écrire :

$$\Omega\, a^2x'^2 + \Omega\, b^2y'^2 = D^2$$

Choisissons la valeur de la constante D de manière à satisfaire à l'égalité :

$$D^2 = \Omega\, a^2b^2$$

L'équation de l'ellipse d'inertie devient :

$$a^2x'^2 + b^2y'^2 = a^2b^2$$

ou :

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$$

on voit que ce demi-axe b dirigé suivant ox′ est égal au rayon de gyration relatif à oy′, et que, inversement, le demi-axe dirigé suivant oy′ est a, rayon de gyration relatif à ox′.

Remarque II. — *Si une surface admet un axe de symétrie, cet axe est principal d'inertie pour tous ses points.* En effet, supposons que l'axe ox′ (fig. 128) soit un axe de symétrie de la surface A B. Deux points M et M′ ayant même abscisse x' auront leurs ordonnées égales et de signes contraires. Les valeurs de $x'\,y'\,dx'\,dy'$ seront égales et de signes contraires pour ces deux points; leur somme sera nulle. Par suite l'intégrale $C = \int\int x'\,y'\,dx'\,dy'$ sera nulle puisque tous ses éléments auront deux à deux leur somme nulle. Donc les axes des coordonnées sont principaux d'inertie pour l'origine, et comme le raisonnement qui précède est exact quelle que soit la position de l'origine sur l'axe de symétrie ox′, celui-ci est bien principal d'inertie pour tous ses points.

124. — Détermination directe des moments d'inertie de quelques surfaces. — *Rectangle plein.* — Cherchons le moment d'inertie du rectangle A B C D par rapport à l'axe ox mené par son centre o parallèlement à sa base A B (fig. 129). Désignons par l la longueur A B, par h la hauteur B C du rectangle. Prenons pour axe des y une parallèle à B C menée par o ; soit I_x le moment d'inertie cherché ; nous savons que I_x est égal à la valeur de l'intégrale double $\int\int y^2\,dx\,dy$ pour tous les points du rectangle, ce qui nous donne :

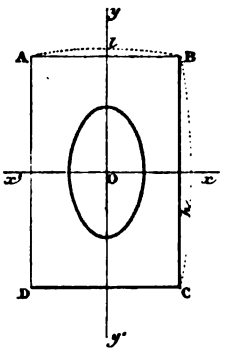

Fig. 129.

$$I_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2\,dy$$

ou

$$I_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx \left(\frac{y^3}{3}\right)_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx\,\frac{1}{3}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(\frac{-h}{2}\right)^3\right) = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx\,\frac{2}{3}\,\frac{h^3}{8} =$$

$$= \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx\,\frac{h^3}{12}$$

d'où :

$$I_x = \frac{h^3}{12}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx = \frac{h^3}{12}\left(\frac{l}{2} - \left(-\frac{l}{2}\right)\right) = \frac{1}{12}\,lh^3$$

On verrait de même que le moment d'inertie I_y du rectangle par rapport à oy est égal à $\frac{1}{12}\,h\,l^3$. Les axes ox, oy sont d'ailleurs des axes de symétrie pour le rectangle, et, par suite, sont les axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité o. L'ellipse centrale d'inertie aura donc ses axes dirigés suivant ox, oy ; les longueurs des demi-axes dirigés suivant ox et oy auront respectivement pour valeurs les rayons de gyration b, a du rectangle relatifs aux axes oy, ox :

$$b = \sqrt{\frac{I_y}{\Omega}} = \sqrt{\frac{hl^3}{12\,hl}} = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

$$a = \sqrt{\frac{I_x}{\Omega}} = \sqrt{\frac{lh^3}{12\,hl}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}$$

Connaissant le moment d'inertie d'un rectangle plein, on en déduira les moments d'inertie de toutes les figures qui peuvent être considérées comme des sommes ou des différences de rectangles.

Nous allons donner les moments d'inertie de quelques surfaces rentrant dans cette catégorie et qu'on rencontre fréquemment dans la pratique.

Rectangle évidé. — Cherchons le moment d'inertie de la surface comprise entre les rectangles concentriques ABCD, A'B'C'D' par rapport à l'axe ox (fig. 130).

Posons :

$$AB = l \quad BC = h \quad A'B' = l' \quad B'C' = h'$$

Désignons par I_x le moment d'inertie cherché ; par I_{1x}, I_{2x} les moments d'inertie des rectangles ABCD, A'B'C'D' par rapport à ce même axe ox; nous avons :

$$I_{1x} = \frac{1}{12} lh^3 \quad I_{2x} = \frac{1}{12} l'h'^3$$

et par suite :

$$I_x = I_{1x} - I_{2x} = \frac{1}{12}(lh^3 - l'h'^3)$$

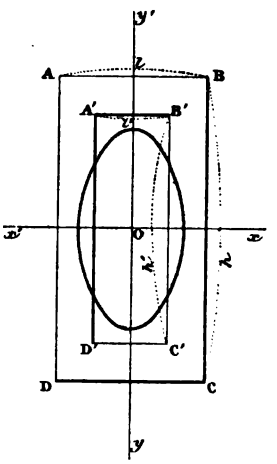

Fig. 130.

En désignant par I_y, I_{1y}, I_{2y} les moments des trois surfaces par rapport à oy, nous aurons de même :

$$I_y = I_{1y} - I_{2y} = \frac{1}{12}(hl^3 - h'l'^3)$$

Connaissant les moments d'inertie de la surface par rapport aux axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité, nous déterminerons l'ellipse d'inertie et nous passerons de là, comme il a été dit ci-dessus, au moment d'inertie relatif à un axe quelconque.

Si le rectangle évidé est disposé comme l'indique la figure 131, nous aurons son moment d'inertie I_x relatif à ox en le considérant comme égal au rectangle ABGH diminué de la somme des rectangles CDEF, LMNK.

Soient I_{1x}, I_{2x}, I_{3x}, les moments d'inertie de ces trois rectangles relativement à ox. Posons :

$$AB = l \quad BG = h \quad DM = l' \quad DE = h'$$

Nous avons :

$$I_{1x} = \frac{1}{12} lh^3 \quad I_{2x} = \frac{1}{12} CD \times h'^3 \quad I_{3x} = \frac{1}{12} NM \times h'^3$$

et :

$$I_x = I_{1x} - (I_{2x} + I_{3x}) = \frac{1}{12}\left(lh^3 - h'^3 (CD + MN)\right) = \frac{1}{12}(lh^3 - h'^3 (AB - MD)$$

$$I_x = \frac{1}{12}\left(lh^3 - (l - l')\, h'^3\right)$$

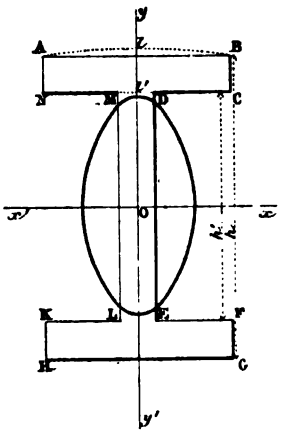

Fig. 131.

Pour avoir le moment I_y de la surface donnée par rapport à oy nous la considèrerons comme formée par la somme des trois rectangles ABCN, DMLE, FKHG. Soient I_{4y}, I_{5y}, I_{6y}, les moments d'inertie de ces trois rectangles relatifs à oy. Nous avons :

$$I_{4y} = \frac{1}{12} AN \times l^3 \quad I_{5y} = \frac{1}{12} h'l'^3$$

$$I_{6y} = \frac{1}{12} KH \times l^3$$

et :

$$I_y = I_{4y} + I_{5y} + I_{6y} = \frac{1}{12} l^3 (AN + HK) + \frac{1}{12} h'l'^3 = \frac{1}{12}\left[l^3 (AH - NK) + h'l'^3\right]$$

$$I_y = \frac{1}{12}\left[(h - h')\, l^3 + h'l'^3\right]$$

Nous savons que I_x, I_y permettent de tracer l'ellipse centrale d'inertie et par suite de déterminer les moments d'inertie de la surface par rapport à un axe quelconque.

Cercle. — Cherchons le moment d'inertie d'un cercle de rayon R par rapport à un diamètre ox (figure n° 132). Il est clair que sa valeur est la même quel que soit le diamètre. En d'autres termes, l'ellipse d'inertie est dans ce cas une circonférence.

Divisons la surface du cercle en éléments infiniment petits ω au moyen de rayons faisant entre eux des angles $d\alpha$ infiniment petits, et de circonférences concentriques au cercle, distantes entre elles de dr. Soit M un point situé à l'intérieur du cercle. Menons la droite oM, désignons par r sa longueur, par α l'angle Mox. Soit ω l'élément de la surface du cercle en M. Abaissons MT perpendiculaire sur l'axe d'inertie ox. L'élément du moment d'inertie correspondant au point M a pour valeur $\omega\ \overline{MT}^2$. Le moment d'inertie cherché est la somme de ces éléments pour tous les points situés à l'intérieur

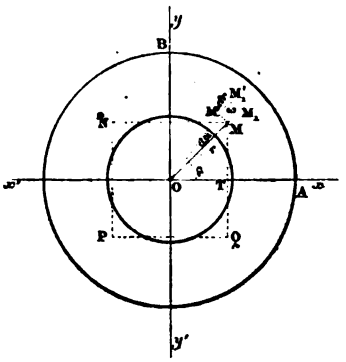

Fig. 132.

du cercle. Mais il est évident que les moments d'inertie des quatre quadrants AoB, BoA', A'oB', B'oA sont égaux, car ces quatre quadrants peuvent être partagés en éléments superficiels égaux et également distants de ox, en M, N, P, Q. Le moment d'inertie cherché est donc égal à 4 I, I désignant la somme des éléments $\omega \times \overline{MT}^2$ pour tous les points du quadrant AoB. Cherchons la valeur de I.

Evaluons ω et MT en fonction de r et de α. Nous avons :

$$MT = r \sin \alpha$$

Quant à la surface ω comprise entre deux rayons oM, oM' faisant entre eux un angle $d\alpha$ et deux arcs ~~MM_1, $M'M'_1$~~ de rayons r et $r + dr$, elle est égale, à un infiniment petit d'ordre supérieur près, à la surface d'un rectangle ayant pour base $MM' = rd\alpha$ et pour hauteur $MM_1 = dr$. On a donc :

$$\omega = rd\alpha\, dr$$

Et par suite :

$$\omega\,\overline{MT}^2 = r^3 \sin^2 \alpha\, d\alpha\, dr$$

Le moment d'inertie cherché I, égal à la somme de ces éléments pour tous les points à l'intérieur du quadrant AoB, est égal à l'intégrale double $\int\int r^3 \sin^2 \alpha\, d\alpha\, dr$, r variant de 0 à R et α de 0 à $\frac{\pi}{2}$. On a donc :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^3 \sin^2 \alpha\, d\alpha\, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha\, d\alpha \int_0^R r^3\, dr$$

L'intégrale de $r^3\, dr$ est $\frac{r^4}{4}$; cette intégrale prise entre les limites 0 et R a pour valeur $\frac{R^4}{4}$. On a donc :

$$I = \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha\, d\alpha \tag{1}$$

Cherchons la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha\, d\alpha$. Nous avons :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha\, d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \alpha)\, d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha\, d\alpha$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha\, d\alpha \tag{2}$$

Posons d'ailleurs :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

Nous aurons :

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

et :

$$d\alpha = -d\beta$$

De plus, pour $\alpha = 0$, on a $\beta = \frac{\pi}{2}$; pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$. On a donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha\, d\alpha = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin^2 \beta\, d\beta$$

Si on renverse l'ordre des limites d'une intégrale définie celle-ci change de signe (voir Ire partie, n° 80), on a donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \, d\alpha = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} - \sin^2 \beta \, d\beta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \beta \, d\beta$$

Mais d'après la définition même d'une intégrale définie :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \beta \, d\beta$$

est identiquement la même chose que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \, d\alpha .$$

Donc on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \, d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \, d\alpha$$

et en vertu de cette égalité, l'équation (2) peut s'écrire :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \, d\alpha$$

d'où :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \frac{\pi}{4}$$

Portons cette valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \, d\alpha$ dans l'expression (1) de I on a :

$$I = \frac{\pi R^4}{16}$$

Et le moment d'inertie cherché du cercle a pour expression $4I$ c'est-à-dire $\frac{\pi R^4}{4}$.

Le rayon de gyration a pour valeur :

$$\sqrt{\frac{\pi R^4}{4\pi R^2}} = \frac{R}{2}$$

Cercle évidé. — La surface comprise entre deux cercles concentriques de rayon R et R' (fig. 133) aura pour moment d'inertie

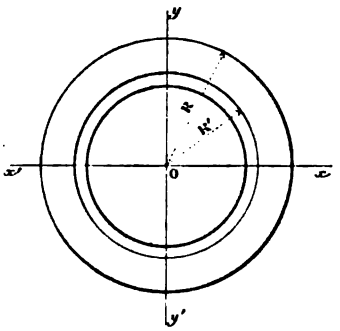

Fig. 133.

par rapport à un diamètre quelconque ox la différence des moments d'inertie de deux cercles, c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}(R^4 - R'^4)$.

Le rayon de gyration a pour valeur.

$$\sqrt{\frac{\pi (R^4 - R'^4)}{4\pi (R^2 - R'^2)}} = \sqrt{\frac{R^2 + R'^2}{4}} = \frac{\sqrt{R^2 + R'^2}}{2}$$

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

NOTIONS PRATIQUES DE CALCUL INFINITÉSIMAL

CHAPITRE PREMIER

OBJET PRATIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL

§ I. — But général des mathématiques appliquées 3

§ II. — Définitions. Variables. Fonctions explicites, implicites, algébriques, entières, rationnelles, transcendantes. Fonctions continues. Représentation géométrique des fonctions. Limites. Infiniment petits. 4

§ III. — Objet pratique du calcul infinitésimal. Exemple 11

§ IV. — Infiniment petits de divers ordres. Théorème. Résumé du chapitre I. Deux problèmes généraux à résoudre. Calcul différentiel. Calcul intégral. . 17

LIVRE PREMIER

CALCUL DIFFÉRENTIEL

CHAPITRE II

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES

ÉTANT DONNÉES LES RELATIONS QUI LIENT DES VARIABLES, EN DÉDUIRE LES RELATIONS QUI LIENT LEURS ACCROISSEMENTS INFINIMENT PETITS SIMULTANÉS

§ I. — Dérivées et différentielles d'une fonction d'une variable indépendante. Définitions 25

§ II. — Recherches des dérivées des fonctions d'une variable indépendante. — A. Théorèmes généraux. Théorème des fonctions inverses; des fonctions de fonctions; des fonctions composées. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'une fraction. — B. Recherches directes des dérivées des fonctions simples. Dérivées des fonctions algébriques simples. Dérivée de x^m, de $\frac{1}{x^m}$. Exposant négatif. Dérivées de $\sqrt[m]{x}$. Exposant fractionnaire. Dérivées des fonctions transcendantes simples. Dérivées de *sin x*, *cos x*, *tg x*, *cotg x*, de *arc sin x* *arc cos x*, *arc tg x*, *arc cotg x*, Dérivée de *log x*, de a^x. — C. Dérivée d'une fonction quelconque. Dérivées des fonctions implicites. Résumé des § I et II 28

§ III. — Dérivées et différentielles d'ordres supérieurs au premier 72
§ IV. — Différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes. Différentielles du premier ordre. Différentielles totales. Différentielles et dérivées partielles. Différentielles d'ordres supérieurs au premier 74

CHAPITRE III

APPLICATIONS DIRECTES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

§ I. — Application du calcul différentiel à l'étude de la variation des fonctions, Maxima et Minima. Exemple. 81
§ II. — Applications géométriques du calcul différentiel. Recherche des tangentes aux courbes planes. Équation de la ligne droite. Équation de la tangente à une courbe donnée à un point donné. Rayon de courbure en un point donné d'une courbe plane. Équation du plan. Équation du plan tangent à une surface. 86

LIVRE II

CALCUL INTÉGRAL

CHAPITRE IV

DES INTÉGRALES

ÉTANT DONNÉES LES RELATIONS QUI LIENT LES ACCROISSEMENTS INFINIMENT PETITS SIMULTANÉS DE DIVERSES VARIABLES, EN DÉDUIRE LES RELATIONS QUI LIENT CES VARIABLES

§ I. — Solution du problème général dans le cas le plus simple. — Intégrales définies. — Intégrales indéfinies. 105
§ II. — Recherches des intégrales. — Intégration directe. — Intégration par décomposition, par substitution, par parties. 109
§ III. — Intégrales multiples 115
§ IV. — Équations différentielles 121

CHAPITRE V

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INTÉGRAL

§ I. — Mesure des surfaces. — Détermination analytique des surfaces planes. — Application. — Surface du cercle. — Mesure des surfaces courbes dans le cas des surfaces de révolution. — Application à la sphère. 123
§ II. — Mesure des arcs de courbes planes. — Application à la parabole. . . . 132
§ III. — Mesure des volumes. — Détermination analytique des volumes. — Volumes des solides de révolution. — Applications. — Volume de la sphère. — Volume du tore 136

DEUXIÈME PARTIE

ÉTUDE SOMMAIRE DES COURBES DU SECOND DEGRÉ

CHAPITRE PREMIER

RAYONS INFINIS. CLASSIFICATION DES COURBES DU SECOND DEGRÉ

§ I. — Courbes algébriques. — Rayons infinis. — Asymptotes. — Équation d'un faisceau de n droites passant par l'origine des coordonnées. — Équation des rayons infinis menés de l'origine des coordonnées à une courbe algébrique. 147
§ II. — Classification des courbes du second degré. — Équation générale des courbes du second degré. — Rayons infinis des courbes du second degré. — Hyperboles, paraboles, ellipses. 154

CHAPITRE II

CENTRES. — DIAMÈTRES. — AXES. — ASYMPTOTES

§ I. — Centre d'une courbe. — Condition nécessaire et suffisante pour que deux équations du second degré représentent la même courbe. — Condition pour que l'origine des coordonnées soit le centre d'une courbe du second degré. — Changement d'origine. — Recherche des centres des courbes du second degré 157
§ II. — Diamètres des courbes du second degré. — Courbes à centres. — Diamètres conjugués. — Équation d'une courbe du second degré à centre rapportée à deux diamètres conjugués. — Signification des coefficients des différentes puissances des variables dans l'équation de cette courbe. — Diamètres de la parabole. — Équation de la parabole rapportée à un diamètre et à une tangente à l'extrémité de ce diamètre 165
§ III. — Axe des courbes du second degré. — Courbes à centre. — Équation d'une courbe du second degré à centre rapportée à ses axes. — Variation de la longueur du demi-diamètre d'une courbe du second degré à centre. — Axe de la parabole. — Équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet 175
§ IV. — Asymptotes des courbes du second degré. — Hyperbole. — Parabole. 183

CHAPITRE III

FOYERS ET DIRECTRICES

§ I. — Une courbe du second degré est le lieu géométrique des points tels que le rapport de leurs distances à un point fixe et à une droite fixe, est constant. — Distance de deux points. — Distance d'un point à une droite. — Démonstration de la proposition énoncée. — Foyers et directrices. 188
§ II. — Recherche des foyers et directrices. — Ellipse. — Hyperbole. — Parabole. 193

TROISIÈME PARTIE

NOTIONS GÉNÉRALES DE MÉCANIQUE

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS. — DIVISION DE LA MÉCANIQUE

Mouvement. — Inertie de la matière. — Forces. — Objet de la mécanique. — Division de la mécanique. — Cinématique. — Statique. — Dynamique. . . 205

LIVRE PREMIER

CINÉMATIQUE

CHAPITRE II

MOUVEMENT D'UN POINT. — DE LA VITESSE ET DE L'ACCÉLÉRATION

Éléments du mouvement d'un point. — Trajectoire d'un point. — Mouvement d'un point sur sa trajectoire. — De la vitesse. — Du mouvement uniforme. — Le mouvement d'un point est déterminé quand on connaît à chaque instant les variations de la vitesse en grandeur et en direction. — Des résultantes géométriques. — Des projections. — De l'accélération. — De l'accélération tangentielle et de l'accélération centripète. — Mouvement uniformément varié. — Mouvement de la projection d'un point sur un axe. — Etude analytique du mouvement d'un point. — Relation entre l'accélération et les positions successives d'un point sur la trajectoire 207

CHAPITRE III

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE

Définition d'un solide. — Mouvement d'un solide parallèlement à un plan. — Mouvement d'un solide dont un point est fixe. — Mouvement élémentaire le plus général d'un corps solide. — Mouvement continu d'un solide dans l'espace. 224

CHAPITRE IV

MOUVEMENT RELATIF

§ I. — Mouvement relatif d'un point. — Mouvement absolu, mouvement relatif, mouvement d'entraînement. — Relations entre les vitesses d'un point dans les trois mouvements. — Relations entre les accélérations. — Accélération complémentaire. — Accélération centrifuge composée. 232

§ II. — Mouvement relatif d'un solide invariable. — Composition des mouvements. — Composition de deux translations, — d'une translation et d'une rotation, — de deux rotations, — de deux mouvements quelconques. . . . 236

LIVRE II

STATIQUE

CHAPITRE V

DES FORCES

§ I. — Relations entre le mouvement d'un point matériel et les forces qui lui sont appliquées. — Inertie de la matière. — Des forces. — Principe de l'égalité de l'action et de la réaction. — Principe de l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieur. — Mouvement d'un point matériel soumis à une force constante en grandeur et en direction. — Principe de l'indépendance des effets des forces agissant simultanément sur un point matériel. — Proportionnalité entre les forces et les accélérations qu'elles impriment à un même point matériel. — Masse. — Proportionnalité entre les masses de plusieurs points matériels et les accélérations que leur imprime une même force. — Deux forces agissant sur deux points matériels de masses différentes sont entre elles comme le produit des accélérations qu'elles leur impriment par les masses de ces points. — Unité de masse. — Quand un point se meut sous l'action d'une force constante ou variable, cette force est à chaque instant égale au produit de la masse du point par son accélération. — Poids correspondant à l'unité de masse. 241

§ II. — Composition des forces appliquées à un point materiel. 249

§ III. — Des travaux et des moments. — Travail d'une force. — Le travail de la résultante est égale à la somme algébrique des travaux des composantes. — Le travail d'une force correspondant à un déplacement résultant est égal à la somme des travaux correspondants aux déplacements composants. — Moment d'une force. — Relation entre le travail d'une force dont le point d'application tourne autour d'un axe fixe, et son moment par rapport à à cet axe. — Théorème des moments. 251

CHAPITRE VI

CONDITIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE

§ I. — Équilibre d'un point matériel. — Définition de l'équilibre. — Conditions d'équilibre d'un point matériel libre. — Conditions d'équilibre d'un point matériel soumis à des liaisons. 256

§ II. — Équilibre d'un système de points matériels. — Système de points matériels tous libres. — Système de points matériels assujettis à des liaisons. — Théorème des travaux virtuels. 258

CHAPITRE VII

ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES

§ I. — Conditions d'équilibre d'un corps solide. — Conditions d'équilibre d'un corps solide libre ; — d'un corps solide soumis à des liaisons ; — d'un solide assujetti à tourner autour d'un point fixe ; — autour d'une droite fixe. . . 264

§ II. — Composition des forces appliquées à un corps solide. — Systèmes de forces équivalents. — Composition des forces concourantes; — des forces parallèles. — Des couples. — Moment d'un couple. — Composition des couples. — Composition des forces appliquées à un corps solide. 268
§ III. — Centre de gravité d'un corps solide. — Définition. Recherche analytique du centre de gravité d'un solide quelconque. — Centre de gravité d'un volume homogène; — d'une surface; — d'une ligne. — Centres de gravité de quelques figures géométriques : ligne droite, triangle, trapèze, prisme et cylindre; pyramide et cône. — Détermination analytique du centre de gravité d'une ligne, d'une surface ou d'un volume quelconque. . 279

CHAPITRE VIII

ÉQUILIBRE DE QUELQUES SYSTÈMES DE POINTS MATÉRIELS

§ I. — Équilibre d'un système de points matériels soumis à la pesanteur. — Équilibre indifférent. — Application : Pont-levis à flèche. 289
§ II. — Polygones funiculaires. — Équilibre d'un cordon simple soumis à deux forces. — De trois cordons réunis par un nœud. — Cas général. — Polygone de Varignon. — Cas où les points extrêmes sont supportés par des appuis fixes. — Application aux ponts suspendus 292
§ III. — Polygones articulés. — Définition. — Articulations sphériques; cylindriques. — Conditions d'équilibre d'un polygone à articulations sphériques. Application : Équilibre d'une ferme 301

LIVRE III

DYNAMIQUE

CHAPITRE IX

DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL

§ I. — Équations générales du mouvement d'un point. — Application. Mouvement d'un corps soumis à la pesanteur 307
§ II. — Théorèmes généraux servant à abaisser dans certains cas du second ordre au premier les équations générales du mouvement. — Définitions. — Théorème I, des quantités de mouvement. — Théorème II, des quantités de mouvement projetées. — Théorème III, des moments des quantités de mouvements. — Théorème IV, des aires. — Théorème V, des forces vives. — Application. Mouvement des planètes autour du soleil. 311
§ III. — Mouvement d'un point soumis à des liaisons. — Conditions pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan; — à une autre droite. — Mouvement d'un point assujetti à se mouvoir sur une surface fixe; — sur une courbe fixe. — Application. Pendule simple 329

CHAPITRE X

DYNAMIQUE D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

§ I. — Mouvement d'un système de points matériels. — Principe de d'Alembert. 336
§ II. — Mouvement des corps solides. — Théorèmes généraux. — Mouvement du centre de gravité d'un corps solide. — Mouvement d'un solide assujetti à tourner autour d'un axe. — Application. Pendule composé. — Mouvement relatif. — Mouvement le plus général d'un corps solide. 337

§ III. — Moments d'inertie des surfaces planes. — Recherches des tensions dans un prisme fléchi par des forces transversales. — Relations entre les moments d'inertie d'une surface plane par rapport à deux axes parallèles dont l'un passe par le centre de gravité ; — par rapport à plusieurs axes concourants. — Ellipse d'inertie. — Moment d'inertie de quelques surfaces. Rectangle plein et évidé. Cercle plein et évidé. 351

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.